Durée : 4 heures

∾ Corrigé du baccalauréat STI décembre 2006 ∾ Nouvelle Calédonie Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résolution d'une équation.

   a. $(z-4\text{i})\left(z^2-4z+8\right)=0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-4\text{i} & = & 0\\ z^2-4z+8 & = & 0\end{array}\right.$

   La première équation a pour solution 4i; pour l'équation du second degré : $\Delta = 16-32 = -16 = (4\text{i})^2$.

   L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées : $\frac{\leqslant}{4+4\text{i}}2 = 2+2\text{i}$ et $2-2\text{i}$.

   Conclusion : $S=\{4\text{i} \quad ; \quad 2+2\text{i} \quad ; \quad 2-2\text{i}\}$.

   b.
   - $4\text{i} = 4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$;
   - $|2+2\text{i}| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
     On a alors $2+2\text{i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
   - La dernière solution étant la conjuguée de la précédente :
     $2-2\text{i} = 2\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

2. **a.** Voir la figure à la fin de l'exercice

   b. On a $\text{M}\left(\frac{2+0}{2}=1\,;\,\frac{2+4}{2}=3\right)$.

3. **a.** $b' = \dfrac{16}{2+2\text{i}} = \dfrac{16(2-2\text{i})}{(2+2\text{i})(2-2\text{i})} = \dfrac{32(1-\text{i})}{8} = 4(1-\text{i})$;

   $c' = \dfrac{16}{4\text{i}} = \dfrac{4}{\text{i}} = \dfrac{4\text{i}}{-1} = -4\text{i}$. On admettra que $m' = \dfrac{8}{5} - \dfrac{24}{5}\text{i}$.

   b. Voir la figure

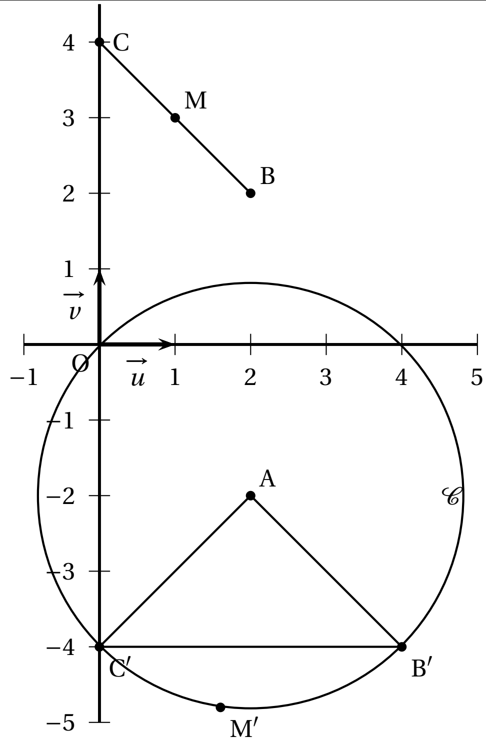
4. Quelques configurations géométriques.

   a. On a $\left|b'-a\right| = |4-4\text{i}-2+2\text{i}| = |2-2\text{i}| = 2\sqrt{2}$;
   $\left|c'-a\right| = |-4\text{i}-2+2\text{i}| = |-2-2\text{i}| = 2\sqrt{2}$;
   $\left|m'-a\right| = \left|\dfrac{8}{5}-\dfrac{24}{5}\text{i}-2+2\text{i}\right| = \left|-\frac{2}{5}-\frac{14}{5}\text{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{14}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4+196}{25}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

   b. On vient donc de démontrer que :
   $\left|b'-a\right| = \text{AM}' = \left|c'-a\right| = \text{AC}' = \left|m'-a\right| = \text{AM}' = 2\sqrt{2}$, ce qui montre que les points B′, C′ et M′ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $2\sqrt{2}$.

   c. On a vu que $\text{OA} = |z_\text{A}|\ v = 2\sqrt{2}$, ce qui montre que O appartient au cercle $\mathscr{C}$.

   d. On a vu que $\text{AB}'^2 = 8$ et $\text{AC}'^2 = 8$, donc le triangle AB′C′ est isocèle en A.
   D'autre part $\left|c'-b'\right|^2 = \left|-1\text{i}-(4-4\text{i})-b'\right|^2 = 16$.
   Donc $16 = 8+8 \iff \text{B}'\text{C}'^2 = \text{AB}'^2+\text{AC}'^2 \iff$ AB′C′ est un triangle rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.



EXERCICE 2 **3 points**

1. **a.** h étant dérivable sur $[0~;~+\infty[$, g l'est aussi et
$g'(t) = h'(t) + \dfrac{1}{2}\text{e}^{-t}$.
Or par hypothèse $h'(t) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{-t} - 2h(t)$ donc en reportant dans la première équation :
$g'(t) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{-t} - 2h(t) + \dfrac{1}{2}\text{e}^{-t} = \text{e}^{-t} - 2h(t) = -2\left(h(t) - \dfrac{1}{2}\text{e}^{-t}\right) = -2g(t)$.
Finalement $g'(t) = -2g(t) \iff g'(t) + 2g(t)$ ce qui signifie que la fonction g est une solution de différentielle (E) $y' + 2y = 0$.
b. On sait que les solutions de l'équation (E) sont de la forme $y = A\text{e}^{-2t}$, $A \in \mathbb{R}$.
c. On a donc $h(t) = g(t) + \dfrac{1}{2}\text{e}^{-t}$, ce qui entraîne en particulier pour $t = 0$, que
$h(0) = g(0) + \dfrac{1}{2}\text{e}^{-0} = 0 \iff A + \dfrac{1}{2} = 0 \iff A = -\dfrac{1}{2}$.
Finalement sur $[0~;~+\infty[$: $h(t) = \dfrac{1}{2}\left(\text{e}^{-t} - \text{e}^{-2t}\right)$.

2. Étude des variations de h
a. On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} \text{e}^{-t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \text{e}^{-2t} = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = 0$.
b. On a $h'(t) = \dfrac{1}{2}\left(-\text{e}^{-t} + 2\text{e}^{-2t}\right) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{-t}\left(2\text{e}^{-t} - 1\right)$.
Comme $\dfrac{1}{2}\text{e}^{-t} > 0$ quel que soit le réel x, on en déduit que $h'(t)$ est du signe de la différence $2\text{e}^{-t} - 1$.
c. $h(\ln 2) = \dfrac{1}{2}\left(\text{e}^{-\ln 2} - \text{e}^{-2\ln 2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\text{e}^{\ln 2}} - \dfrac{1}{\text{e}^{+2\ln 2}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$.
$2\text{e}^{-t} - 1 > 0 \iff 2\text{e}^{-t} > 1 \iff \text{e}^{-t} > \dfrac{1}{2} \iff -t > -\ln 2$ (par croissance de la fonction ln)
$t < \ln 2$.

De même on a $2e^{-t} - 1 < 0 \iff t > \ln 2$.

On en déduit que sur $[0~;~\ln 2[$, h est croissante et sur $[\ln 2~;~+\infty[$, h est décroissante. D'où le tableau de variations :

t	0	$\ln 2$	$+\infty$
$h(t)$	0	$\nearrow$ $\frac{1}{8}$ $\searrow$	0

3. La hauteur maximale est égale à $\dfrac{1}{8} = 0,125$ (m). Il faut donc que la cuve ait une hauteur d'au moins 0,125 (m) = 12,5 (cm) pour qu'il n'y ait débordement.

Problème **10 points**

Partie A : étude de la fonction f

1. Étude des limites.

a. Comme $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

Ceci signifie que l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de zéro.

b. $f(x) = 4 - \ln 2 - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}\ln x$ soit en factorisant x dans les deux derniers termes : $f(x) = 4 - \ln 2 - x\left(\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. Étude du signe de f sur un intervalle

a. f somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = -2 \times \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}\left(-x + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1 - x^2}{x} = \dfrac{1 - x^2}{2x}$.

b. Comme $2x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$.

On sait que ce trinôme est négatif sauf entre -1 et 1.

Conclusion : sur $]0~;~1[$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante et sur $[1~;~+\infty[$, f est décroissante.

$f(1) = 4 - \ln 2 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 1 = \dfrac{15}{4} - \ln 2$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $\frac{15}{4} - \ln 2$ $\searrow$	$-\infty$

c. $f(4) = 4 - \ln 2 - \dfrac{1}{4} \times 4^2 + \dfrac{1}{2}\ln 4 = 4 - \ln 2 - 4 + \dfrac{1}{2} \times 2\ln 2 = 0$.

On a vu que $f(1) = \frac{7}{2} - \ln 2 \approx 2,8 > 0$.

Comme la fonction est décroissante sur $[1~;~4]$, on peut en déduire que sur $[1~;~4]$, $f(x) \geqslant 0$.

3. a. On a $M(x\,;\,y) \in T_B \iff y - f(4) = f'(4)(x-4)$

On a $f'(4) = \dfrac{1-4^2}{2\times 4} = -\dfrac{15}{8}$.

Donc $M(x\,;\,y) \in T_B \iff y - 0 = -\dfrac{15}{8}(x-4) \iff y = -\dfrac{15}{8}x + \dfrac{15}{2}$.

b. Voir la figure à la fin de l'exercice.

Partie B

1. $1+[f'(x)]^2 = 1+\left[\dfrac{1-x^2}{2x}\right]^2 = 1+\dfrac{\left(1-x^2\right)^2}{4x^2} = \dfrac{4x^2+1+x^4-2x^2}{4x^2} = \dfrac{2x^2+1+x^4}{4x^2} = \dfrac{\left(1+x^2\right)^2}{4x^2} = \dfrac{\left(1+x^2\right)^2}{(2x)^2} = \left(\dfrac{1+x^2}{2x}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{x}{2}\right)^2$.

2. Comme $x>0$, $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2x}+\dfrac{x}{2}$.

On a donc $L = \displaystyle\int_1^4 2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 2\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^4 x\,\mathrm{d}x = \left[\ln x + \dfrac{x^2}{2}\right]_1^4 = \ln 4 + \dfrac{4^2}{2} - \left(\ln 1 + \dfrac{1^2}{2}\right) = \ln 4 + 8 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{15}{2} + \ln 4$.

L'unité de longueur est égale à 2 cm, donc

$L \approx 2\times 8,886 \approx 17,77$ cm à 1 mm près.

Partie C

1. G est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$G'(x) = \ln x + x\times\dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

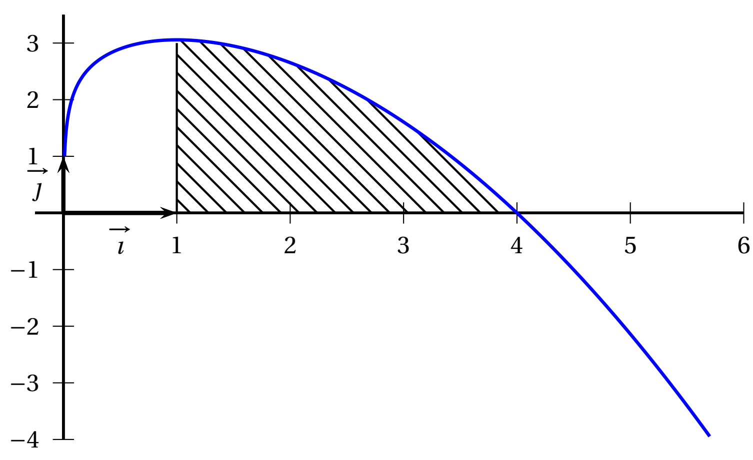
G est donc une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. La fonction f positive sur $[1\,;\,4]$; donc l'aire de la partie $\mathcal{A}$ est égale à l'intégrale :

$\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(4-\ln 2-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\ln x\right)\,\mathrm{d}x = \left[(4-\ln 2)x - \dfrac{1}{12}x^3 + \dfrac{1}{2}(x\ln x - x)\right]_0^1 = (4-\ln 2)\times 4 - \dfrac{1}{12}4^3 + \dfrac{1}{2}(4\ln 4 - 4) - \left[(4-\ln 2)\times 1 - \dfrac{1}{12}1^3 + \dfrac{1}{2}(1\ln 1 - 1)\right] = 16 - 4\ln 2 - \dfrac{16}{3} + 2\ln 4 - 2 - 4 + \ln 2 + \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{21}{4} + \ln 2$.

Comme l'unité d'aire est égale à $2\times 2 = 4$ cm^2, l'aire de la partie $\mathcal{A}$ est égale à :

$4\times\left(\dfrac{21}{4}+\ln 2\right) = 21 + 4\ln 2 \approx 23,77$ cm^2 au mm^2 près.



Si vous photocopiez ce corrigé pensez à en créditer l'**A. P. M. E. P.**, merci