Durée : 4 heures

∾ Corrigé du baccalauréat STI novembre 2008 Nouvelle-Calédonie ∾ Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** $P(z) = 4z^4 - 7z^3 + 11z^2 + 10z - 12 = \left(z^2 - 2z + 4\right)\left(4z^2 + \alpha z + \beta\right) =$
$4z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 - 8z^3 - 2\alpha z^2 - 2\beta z + 16z^2 + 4\alpha z + 4\beta$.

En identifiant les termes de même degré :

$$\left\{\begin{array}{lcl} -7 & = & \alpha - 8 \\ 11 & = & \beta - 2\alpha + 16 \\ 10 & = & -2\beta + 4\alpha \\ -12 & = & 4\beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & \alpha - 8 \\ -5 & = & \beta - 2\alpha \\ 10 & = & -2\beta + 4\alpha \\ -3 & = & \beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & \alpha \\ 11 & = & \beta - 2 + 16 \\ 10 & = & -2\beta + 4 \\ -12 & = & 4\beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & \alpha \\ -3 & = & \beta \\ 1 & = & \alpha \\ -3 & = & \beta \end{array}\right.$$

Finalement :

$$P(z) = \left(z^2 - 2z + 4\right)\left(4z^2 + z - 3\right).$$

b. Dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z^2 - 2z + 4 & = & 0 \\ 4z^2 + z - 3 & = & 0 \end{array}\right.$

Primo : $z^2 - 2z + 4 = 0 \iff (z-1)^2 - 1 + 4 = 0 \iff (z-1)^2 + 3 = 0 \iff (z-1)^2 - (\text{i}\sqrt{3})^2 = 0 \iff (z - 1 + \text{i}\sqrt{3})(z - 1 - \text{i}\sqrt{3}) = 0$.

D'où les solutions : $1 + \text{i}\sqrt{3}$ et $1 - \text{i}\sqrt{3}$.

Secundo : $4z^2 + z - 3 = 0 \iff 4\left(z^2 + \dfrac{z}{4} - \dfrac{3}{4}\right) = 0 \iff \left(z + \dfrac{1}{8}\right)^2 - \dfrac{1}{64} - \dfrac{3}{4} = 0 \iff \left(z + \dfrac{1}{8}\right)^2 - \dfrac{49}{64} = 0 \iff \left(z + \dfrac{1}{8}\right)^2 - \left(\dfrac{7}{8}\right)^2 \iff \left(z + \dfrac{1}{8} + \dfrac{7}{8}\right)\left(z + \dfrac{1}{8} - \dfrac{7}{8}\right) = 0 \iff (z+1)\left(z - \dfrac{3}{4}\right) = 0$.

D'où les solutions : -1 et $\dfrac{3}{4}$.

Finalement l'équation $P(z) = 0$ a quatre solutions : deux réelles -1 et $\dfrac{3}{4}$ et deux solutions complexes $1 + \text{i}\sqrt{3}$ et $1 - \text{i}\sqrt{3}$.

2. **a.** $|b|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |b| = 2$.

On peut alors écrire $b = 2\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Un argument de b esty donc $\dfrac{\pi}{3}$.

Comme $c = \overline{b}$ il en résulte que $|c| = 2$ et qu'un argument de c est égal à $-\dfrac{\pi}{3}$.

b. Voir la figure

c. $\text{DA} = |z_\text{A} - z_\text{D}| = \left|-\dfrac{7}{4}\right| = \dfrac{7}{4}$;

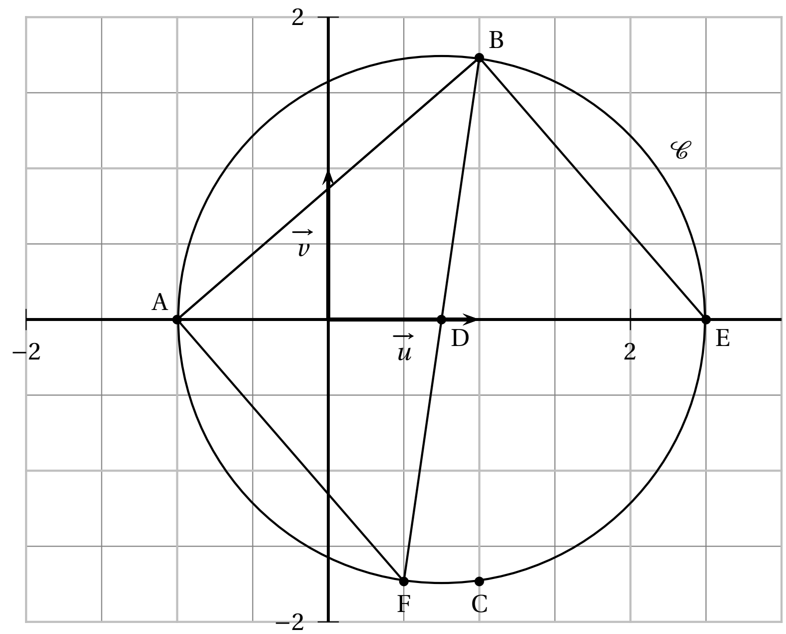
$\text{DB}^2 = |z_\text{B} - z_\text{D}|^2 = \left|\dfrac{1}{4} + \text{i}\sqrt{3}\right|^2 = \dfrac{1}{16} + 3 = \dfrac{49}{16}$; donc $\text{DB} = \dfrac{7}{4}$;

Même pour calcul pour $\text{DC} = \dfrac{7}{4}$;

Donc A, B et C sont situés sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre D et de rayon $\dfrac{7}{4}$.

d. ABE rectangle en B entraîne que [AE] est un diamètre ; donc E est le symétrique de A autour de D soit le point d'affixe $\dfrac{5}{2}$.

De même ABF rectangle en A entraîne que [BF] est un diamètre, donc que F est le symétrique de B autour de D : $\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}+z_{\mathrm{F}}\right)=\frac{3}{4} \iff 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}+z_{\mathrm{F}}\right)=3 \iff 2z_{\mathrm{F}}=1-2\mathrm{i}\sqrt{3} \iff z_{\mathrm{F}}=\frac{1}{2}-\mathrm{i}\sqrt{3}$.



EXERCICE 2 **4 points**

1. Les solutions de (H) sont les fonctions : $t \longmapsto z(t)=K\mathrm{e}^{-140t},\ K\in\mathbb{R}$.
2. **a.** On a donc $y(t)=K\mathrm{e}^{-140t}+0,042$, donc $y'(t)=-140K\mathrm{e}^{-140t}$.
   D'où $y'(t)+140y(t)=-140K\mathrm{e}^{-140t}+140K\mathrm{e}^{-140t}+140\times 0,042=5,88$.
   Donc y est une solution de l'équation différentielle (E).

   b. On a $v(t)=K\mathrm{e}^{-140t}+0,042$ et $v(0)=0\Rightarrow v(0)=K+0,042=0 \iff$
   $K=-0,042$.
   La fonction v est donc définie par $v(t)=-0,042\mathrm{e}^{-140t}+0,042$.
3. Deux utilisations de l'expression trouvée de $v(t)$.

   a. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-140t}=0,\ \lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=0,042\ \left(m\cdot s^{-1}\right)$.

   b. Il faut résoudre $-0,042\mathrm{e}^{-140t}+0,042=0,95\times 0,042 \iff -\mathrm{e}^{-140t}+1=0,95 \iff 0,05=\mathrm{e}^{-140t}$
   et par croissance de la fonction ln,
   $-140t=\ln 0,05 \iff t=-\frac{1}{140}\ln 0,05\approx 0,021\ s$.

PROBLÈME **11 points**

I - Étude d'une fonction auxiliaire

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.
2. Étude des variations de g

a. On a $g'(x) = \mathrm{e}^x(x-2) + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(x-1)$ qui est du signe de $(x-1)$, car quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.
Donc $g'(x) > 0 \iff x > 1$ et $g'(x) < 0 \iff 0 < x < 1$.

b.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-3	$\searrow$	-1 - e	$\nearrow$	$+\infty$

3. Résolution de l'équation $g(x) = 0$

a. On a $g(3) = \mathrm{e}^3 - 1 \approx 19 > 0$ et $g(1) = -1 - \mathrm{e} \approx -2,7 < 0$.
Comme g est dérivable sur $[1\,;3]$, il existe un réel unique $\alpha \in [1\ ;\ 3]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b. La calculatrice donne :
$2,1 < \alpha < 2,2$, puis $2,12 < \alpha < 2,13$.

4. Sur $[0\,;1]$, $g(x) < 0$, donc
— sur $[0\ ;\ \alpha]$, $g(x) < 0$:
— $g(\alpha) = 0$;
— sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$

II - Étude de la fonction *f*

1. Étude de la limite en $+\infty$.

a. En multipliant chaque terme par e^{-x}, on peut écrire :
$f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x + 1\right)}{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x + x\right)} = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-x}}{1 + x\mathrm{e}^{-x}}$.

b. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} + 1 = 1$.
$x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x\mathrm{e}^{-x} = 1$ et finalement
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
Ceci signifie que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

2. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

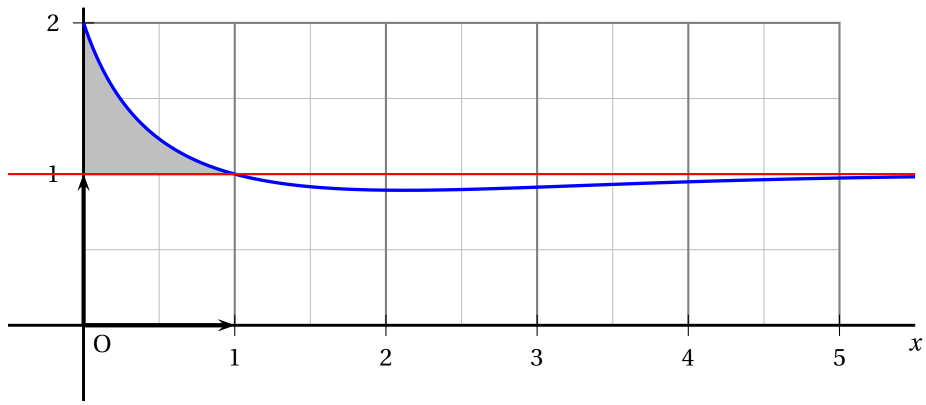
3. Étude des variations de f

a. $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + x\right) - \left(\mathrm{e}^x + 1\right)\left(\mathrm{e}^x + 1\right)}{\left(\mathrm{e}^x + x\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 1}{\left(\mathrm{e}^x + x\right)^2} = \dfrac{x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x - 1}{\left(\mathrm{e}^x + x\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-2) - 1}{\left(\mathrm{e}^x + x\right)^2} = \dfrac{g(x)}{\left(\mathrm{e}^x + x\right)^2}$.

b. Comme pour tout x, $\left(\mathrm{e}^x + x\right)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ vu au dessus. Donc $f'(x) < 0$ si $x < \alpha$. D'où le tableau de variations :

x	0		α		$+\infty$
$f'x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘		↗	$+\infty$

4. Voir la figure.



III - Calcul d'aire

1. Voir la figure ci-dessus.

2. En posant $u(x) = \mathrm{e}^x + x$ et après avoir calculé $u'(x) = \mathrm{e}^x + 1$, on constate que $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
Comme $\mathrm{e}^x > 0$ et $x \geqslant 0$ sur $[0~;~+\infty[$, on en déduit que $u(x) > 0$.
Donc une primitive sur sur $[0~;~+\infty[$ de $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est la fonction
$x \longmapsto F(x) = \ln|u(x)| = \ln u(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + x\right)$.

3. On a donc $\mathscr{B} = \displaystyle\int_0^1 [f(x) - 1]\,\mathrm{d}x = [F(x) - x]_0^1 = \left[\ln\left(\mathrm{e}^x + x\right) - x\right]_0^1 = \ln(\mathrm{e}+1) - 1 - \ln(1+0) + 0 =$ $\ln(1+\mathrm{e}) - 1$. (en unités d'aire).
L'unité sur chaque étant égale à 4 cm, 1 u. a. = 16 cm^2.
Donc $\mathscr{B} = 16 \times [\ln(1+\mathrm{e}) - 1] \approx 0{,}313\,26 \approx 0{,}31$ cm^2 au mm^2 près.