Corrigé du baccalauréat STI Métropole juin 2003
Génie énergétique, génie civil, génie mécanique

Exercice 1 **4 points**

1. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 34 = 36 - 136 = -100 = (10\text{i})^2$: l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

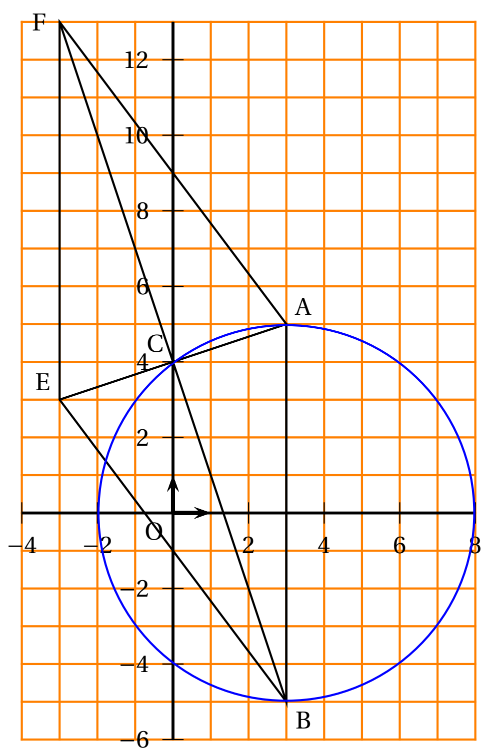
$$\frac{6+10\text{i}}{2} = 3+5\text{i} \quad ; \quad 3-5\text{i}.$$

2. **a.** Voir la figure à la fin de l'exercice.

   b. $z_A - 3 = 3+5\text{i}-3 = 5\text{i}$, donc $|z_A - 3| = 5$;
   $z_B - 3 = 3-5\text{i}-3 = -5\text{i}$, donc $|z_B - 3| = 5$.
   $z_C - 3 = -3+4\text{i}$, donc $|z_C - 3|^2 = 9+16 = 25 = 5^2 \Rightarrow |z_C - 3| = 5$.
   Ces trois résultats signifient que les distances du point d'affixe 3 aux points A, B et C sont égales à 5, donc A, B et C appartiennent au cercle de centre le point d'affixe 3 et de rayon 5.

   c. A et B ont pour abscisse celle du centre du cercle, donc [AB] est un diamètre : le triangle ABC est inscrit dans un cercle dont l'un de ses côtés est un diamètre, c'est un triangle rectangle en C.

3. C est le milieu des diagonales, donc ABDE est un parallélogramme ;
   Ces diagonales sont perpendiculaires (ABC rectangle), donc le quadrilatère ABDE est un losange.



Exercice 2 **5 points**

1. **a.** (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre de la dforme $y' - ay = 0$ dont les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C\text{e}^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.
   Les solutions de (E) dont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C\text{e}^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

   b. $f(0) = 1 \iff C\text{e}^{-2\times 0} = 1 \iff C = 1$.
   Donc $f(x) = \text{e}^{-2x}$.

2. **a.** On a $V_m = \dfrac{1}{10-0}\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\text{d}x$.
   On a $f(x) = \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times \left(-2\text{e}^{-2x}\right)$; donc une primitive de f est F définie par $F(x) = -\dfrac{1}{2}\text{e}^{-2x}$.
   Donc $V_m = \dfrac{1}{10}\left[F(x)\right]_0^{10} = \dfrac{1}{10}\left[F(10) - F(0)\right] = \dfrac{1}{10}\left[-\dfrac{1}{2}\text{e}^{-20} + \dfrac{1}{2}\text{e}^{0}\right] = \dfrac{1-\text{e}^{-20}}{10}$.

   b. On a de même :
   $V_{m_n} = \dfrac{1}{n+1-n}\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\text{d}x = \left[F(n+1) - F(n)\right] = \left[-\dfrac{1}{2}\text{e}^{-2(n+1)} + \dfrac{1}{2}\text{e}^{-2n}\right] = -\dfrac{1}{2}\text{e}^{-2n-2} + \dfrac{1}{2}\text{e}^{-2n} = \dfrac{1}{2}\text{e}^{-2n}\left(1-\text{e}^{-2}\right)$.

3. **a.** $u_0 = \dfrac{1}{2}\left(1-\text{e}^{-2}\right)\text{e}^{0} = \dfrac{1}{2}\left(1-\text{e}^{-2}\right)$;
   $u_1 = \dfrac{1}{2}\left(1-\text{e}^{-2}\right)\text{e}^{-2}$;
   $u_2 = \dfrac{1}{2}\left(1-\text{e}^{-2}\right)\text{e}^{-4}$.

   b. $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1-\text{e}^{-2}\right)\text{e}^{-2(n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(1-\text{e}^{-2}\right)\text{e}^{-2n-2)} = \dfrac{1}{2}\left(1-\text{e}^{-2}\right)\text{e}^{-2n)} \times \text{e}^{-2} = u_n \times \text{e}^{-2}$.
   Or $u_{n+1} = u_n \times \text{e}^{-2}$ signifie que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^{-2}, de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}\left(1-\text{e}^{-2}\right)$.

   c. On a $u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = u_0 \times \dfrac{1-\left(\text{e}^{2}\right)^{10}}{1-\text{e}^{2}} = \dfrac{1}{2}\left(1-\text{e}^{-2}\right)\dfrac{1-\left(\text{e}^{2}\right)^{10}}{1-\text{e}^{2}} = \dfrac{1-\text{e}^{-20}}{2}$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : étude de la fonction f

1. **a.** On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(-3-2x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\text{e}^{x}} = +\infty$, on a par produit des limites :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

   b. En écrivant $f(x) = \dfrac{-3}{\text{e}^{x}} - 2\dfrac{x}{\text{e}^{x}}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{\text{e}^{x}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\text{e}^{x}} = 0$ et finalement par somme de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

   c. Le dernier résultat signifie géométriquement que la courbe $(\mathscr{C})$ a pour asymptote au voisinage de plus l'infini l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

2. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ dont la dérivée est $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Donc :
   $f'(x) = \dfrac{-2\text{e}^{x} - (-3-2x)\text{e}^{x}}{(\text{e}^{x})^2} = \dfrac{(1+2x)\text{e}^{x}}{(\text{e}^{x})^2} = \dfrac{1+2x}{\text{e}^{x}}$.

3. Quel que soit le réel $x\,\text{e}^{x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $1+2x$.
   - $1+2x > 0 \iff x > -\dfrac{1}{2} \Rightarrow f'(x) > 0$: la fonction est croissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$;

- $1+2x<0 \iff x<-\dfrac{1}{2} \Rightarrow f'(x)<0$: la fonction est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$;
- $1+2x=0 \iff x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$; il y a un minimum en $-\dfrac{1}{2}$ qui est égal à

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-3-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{-2}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}=-2\sqrt{\mathrm{e}}$.

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2\sqrt{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	0

4. Dans $\mathbb{R}$, $f(x)=0 \iff -3-2x=0 \iff -3=2x \iff x=-\dfrac{2}{3}$.

   L'équation $f(x)=0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$: $-\dfrac{2}{3}$.

   Comme au dessus le signe de $f(x)$ est celui du numérateur, donc :

   - $f(x)>0 \iff -3-2x>0 \iff -\dfrac{3}{2}>x$, donc $f(x)>0$ sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[$;
   - $f(x)<0 \iff -3-2x<0 \iff -\dfrac{3}{2}<x$, donc $f(x)>0$ sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$;
   - $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0$.

5. Voir plus bas : en $-\frac{3}{2}$, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est horizontale.

Partie B : Détermination d'une primitive et calculs d'aire

1. Calculons $F'(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^x-(2x+5)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\dfrac{2-2x-5}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{-3-2x}{\mathrm{e}^x}=f(x)$.

   On a $F'(x)=f(x)$ ce qui montre que F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

2. **a.** Voir à la fin

   b. On a vu que si $x>-\frac{3}{2}$, $f(x)<0$, donc l'aire (en unité d'aire) de la surface hachurée est égale à :

$$-\int_{-\frac{1}{2}}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$$

   Comme l'unité d'aire est égale à 1 u. a. $=1\times1=1\ \text{cm}^2$, on a donc :

   $\mathscr{A}=-\int_{-\frac{3}{2}}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=-\left[F(5)-F\left(-\frac{3}{2}\right)\right]=F\left(-\frac{3}{2}\right)-F(5)=\dfrac{-3+5}{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}}-\dfrac{15}{\mathrm{e}^5}=2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-\dfrac{15}{\mathrm{e}^5}\ \text{cm}^2$.

   La calculatrice donne $\mathscr{A}\approx 8,86\ \text{cm}^2$.

3. **a.** La courbe (Γ) est la symétrique de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.

   b. On a vu que sur $\left[-\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, $f(x)\leqslant 0$, donc $g(x)\geqslant 0$ et par conséquent sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\,;\,\alpha\right[$, $g(x)-f(x)\geqslant 0$ et on a donc :

$$\mathscr{A}(\alpha)=\int_{-\frac{3}{2}}^{\alpha}[g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x.$$

   Or $g(x)-f(x)=-f(x)-f(x)=-2f(x)$, donc :

$\mathscr{A}(\alpha) = -2\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\,[F(x)]_{-\frac{3}{2}}^{\alpha} = -2\left[F(\alpha) - F\left(-\frac{3}{2}\right)\right] =$

$-2\left[\dfrac{2\alpha+5}{\mathrm{e}^{\alpha}} - 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right] = \boxed{4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \dfrac{4\alpha+10}{\mathrm{e}^{\alpha}}}.$

c. $\mathscr{A}(\alpha) = 4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - 4\dfrac{\alpha}{\mathrm{e}^{\alpha}} - \dfrac{10}{\mathrm{e}^{\alpha}}$.

Or $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \dfrac{\alpha}{\mathrm{e}^{\alpha}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \dfrac{10}{\mathrm{e}^{\alpha}} = 0$, donc finalement :

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \mathscr{A}(\alpha) = 4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}.$$