∾ Corrigé du baccalauréat STI Antilles–Guyane ∾
juin 2009 Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **4 points**

1. $(z-2)\left(\mathrm{i}z+\mathrm{i}+\sqrt{3}\right)=0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-2 & = & 0\\ \mathrm{i}z+\mathrm{i}+\sqrt{3} & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & 2\\ \mathrm{i}z+ & = & -\mathrm{i}-\sqrt{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & 2\\ \mathrm{i}z+ & = & -1+\mathrm{i}\sqrt{3}\end{array}\right.$

2. **a.** On a $z_{\mathrm{A}}=2=2\mathrm{e}^{0\mathrm{i}\pi}$. Le module est donc égal à 2 et un argument à 0.

   b. $z_{\mathrm{B}}=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$. On a $|z_{\mathrm{B}}|^2=1+3=4=2^2 \Rightarrow |z_{\mathrm{B}}|=2$.

   On peut donc écrire $z_{\mathrm{B}}=2\left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

   c. Comme $|z_{\mathrm{A}}|=|z_{\mathrm{B}}|=2 \iff \mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$, A et B appartiennent au cercle Ω de centre O et de rayon 2.

   d. $\mathrm{C}\in\Omega \iff \mathrm{OC}=2 \iff |z_{\mathrm{C}}|=2 \iff |z_{\mathrm{C}}|^2=4 \iff (-1)^2+\lambda^2=4 \iff \lambda^2=3 \iff \lambda=-\sqrt{3}$ (car λ est négatif.

   Donc $z_{\mathrm{C}}=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$. On voit que $z_{\mathrm{C}}=\overline{z_{\mathrm{B}}}$.

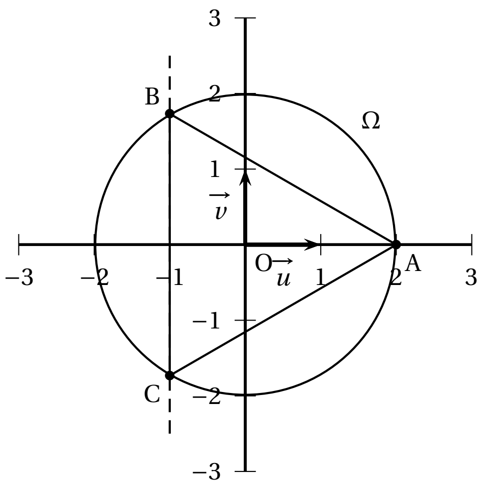
   e. Les points B et C sont les points communs à la droite d'équation $x=-1$ et du cercle Ω.

   f. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;

   B et C sont symétriques autour de $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u}\right)$, donc ABC est isocèle en A ;

   O est sur la médiane issue de A et se trouve aux 2/3 sur cette médiane : O est donc aussi le centre de gravité de ABC :

   Conclusion ABC est un triangle équilatéral.



EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.**

Nombre d'objets du lot L	Avec le défaut A	Sans le défaut A	Total
Avec le défaut B	8	4	12
Sans le défaut B	8	180	188
Total	16	184	200

b. Il y a 186 objets sans défaut parmi 200 ; $p_1 = \dfrac{186}{200} = \dfrac{93}{100} = 0,93$.

c. D'après l e tableau $p_2 = \dfrac{8}{200} = \dfrac{4}{100} = 0,04$.

2. a. Les valeurs possibles sont : 95 (pas de défaut), 105 (défaut A seul), 110 (défaut B) et 120 (deux défauts).

b.

X	95	105	110	120
$p(X = x_i)$	0,9	0,04	0,02	0,04

c. $\text{E}(X) = 95 \times 0,9 + 105 \times 0,04 + 110 \times 0,02 + 120 \times 0,04 = 85,5 + 4,2 + 2,2 + 4,8 = 96,7$.
96,70 € représente le coût moyen de revient d'un objet.

d. Non, car ce prix est inférieur au coût moyen de revient d'un objet (96,70 €).

e. Le coût moyen de revient d'un objet étant de 96,70 € il faut vendre à au moins 106,70 €.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. f est décroissante sur $]-\infty~;~0]$, puis croissante sur $[0~;~+\infty[$, donc la dérivée est respectivement négative puis positive sur ces deux intervalles. La seule courbe vérifiant ces deux conditions est la courbe 2.

2. On a $f'(x) = \alpha \text{e}^{\alpha x} - 2\text{e}^x$, donc le nombre dérivé $f'(0) = \alpha - 2$.
Donc $f'(0) = 0 \iff \alpha = 2$.
$f(x) = f(x) = \text{e}^{2x} - 2\text{e}^x$.

Partie B

1. On peut écrire $f(x) = \text{e}^x\left(\text{e}^x - 2\right)$.
On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{e}^x = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\text{e}^x - 2\right) = +\infty$ et finalement par produit de limites, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. On a $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} 2x = +\infty$, puis $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \text{e}^{2x} = 0$ et par somme de limites $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

3. f est une somme de fonctions dérivables ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
En posant $u(x) = 2x$, la dérivée de e^u est $u'\text{e}^u = 2\text{e}^{2x}$.
Finalement : $f'(x) = 2\text{e}^{2x} - 2\text{e}^x = 2\text{e}^x\left(\text{e}^x - 1\right)$.
Comme $\text{e}^x >$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $\text{e}^x - 1$.
Or $\text{e}^x - 1 = 0 \iff \text{e}^x = 1 \iff x = 0$; $\text{e}^x - 1 > 0 \iff \text{e}^x > 1 \iff x > 0$, d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1. On a $\Delta = 9 - 4 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = 5^2 > 0$. Il y a donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{3+5}{2} = 4$ et $X_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$.

2. $M(x\,;\,y) \in \mathscr{C}_f \cap \mathscr{C}_g \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \text{e}^{2x} - 2\text{e}^{x} \\ y & = & \text{e}^{x} + 4 \end{array}\right. \Rightarrow \text{e}^{2x} - 2\text{e}^{x} = \text{e}^{x} + 4 \iff \left(\text{e}^{x}\right)^2 - 3\text{e}^{x} - 4 = 0.$

   En posant $X = \text{e}^{x}$ l'équation à résoudre devient :
   $\left\{\begin{array}{rcl} X^2 - 3X - 4 & = & 0 \\ X & = & \text{e}^{x} \end{array}\right.$
   On a vu que la première équation a pour solutions -1 et 4, mais la seconde exige que $X > 0$, donc la seule possibilité est $X = 4 = \text{e}^{x}$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien : $x = \ln 4 = 2\ln 2$.
   Pour $x = \ln 4$, $y = 4 + 4 = 8$.
   Conclusion : les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un seul point commun de coordonnées $(\ln 4\,;\,8)$.

   a. Voir plus bas.

   b. On sait qu'en unités d'aire la mesure de l'aire $\mathscr{A}$ est donnée par
   $\displaystyle\int_0^1 (g(x) - f(x))\,\text{d}x = \int_0^1 \left(\text{e}^{x} + 4 - \text{e}^{2x} + 2\text{e}^{x}\right)\text{d}x = \int_0^1 \left(3\text{e}^{x} + 4 - \text{e}^{2x}\right)\text{d}x = \left[3\text{e}^{x} + 4x - \frac{1}{2}\text{e}^{2x}\right]_0^1 =$
   $3\text{e} + 4 - \dfrac{1}{2}\text{e}^2 - 3 - 0 + \dfrac{1}{2} = 3\text{e} - \dfrac{1}{2}\text{e}^2 + \dfrac{3}{2}$.

Annexe 2 (à rendre avec la copie)