∾ Corrigé du baccalauréat STI Métropole 23 juin 2009 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

1. (E) est une équation différentielle de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$, avec $\omega = \frac{1}{2}$. Les solutions de cette équation sont donc de la forme :

$$y = A\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}x\right).$$

2. **a.** Comme $\mathscr{C}_f$ passe par le point A, on en déduit que $f(0) = 1$. Comme la tangente à la courbe admet pour pente $\frac{1}{2}$, on en déduit que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

   b. $f(0) = 1$ entraine que $A\cos(0) + B\sin(0) = 1$ soit $A = 1$.
   $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{B}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$.
   Comme $f'(0) = \frac{1}{2}$ que $A\sin(0) + \frac{B}{2}\cos(0) = \frac{1}{2}$. Donc $B = \frac{1}{2}$.
   On en déduit que $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

3. Voir la figure 1.

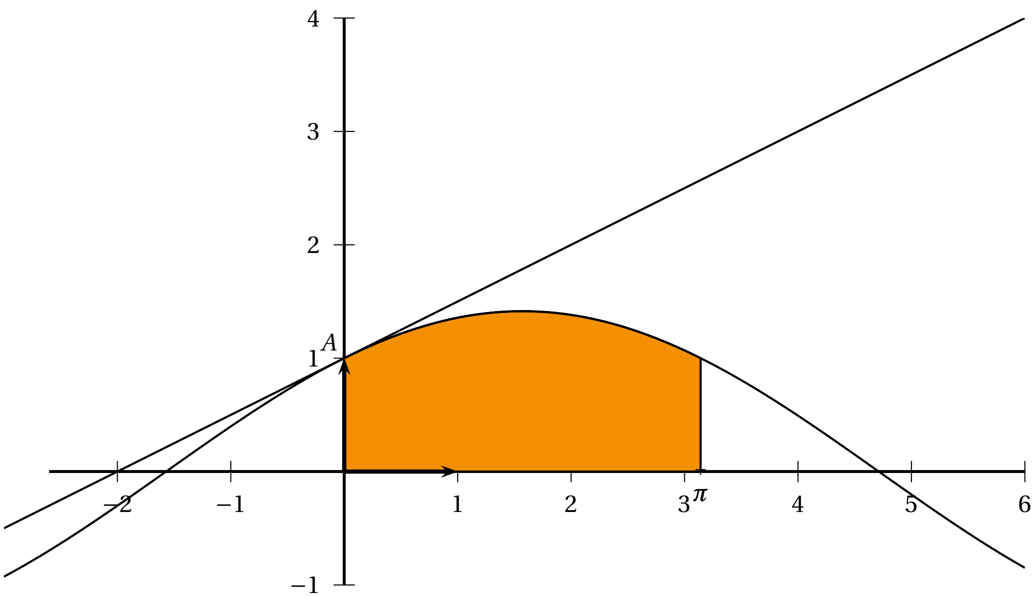


FIGURE 1 – Corrigé

4. $[f(x)]^2 = \left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^2 = \cos^2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}\right)$.
   Or d'après le formulaire $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ et $\sin(2a) = \frac{1}{2}\cos(a)\sin(a)$, on en déduit que :

$$\left[f(x)\right]^2 = 1 + \sin(x).$$

5.

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_0^{\pi}\left[f(x)\right]^2\,\mathrm{d}x\\ &= \pi\,[x-\cos(x)]_0^{\pi}\\ &= \pi\,(\pi-\cos(\pi)-0+\cos(0))\\ V &= \pi\,(\pi-2)\end{aligned}$$

EXERCICE 2 **5 points**

1. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Donc soit $z=-4$ soit $z^2-4z+16=0$. Le discriminant Δ de cette dernière équation vaut : $\Delta = 16-4\times 16 = -3\times 16 = \left(4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$.

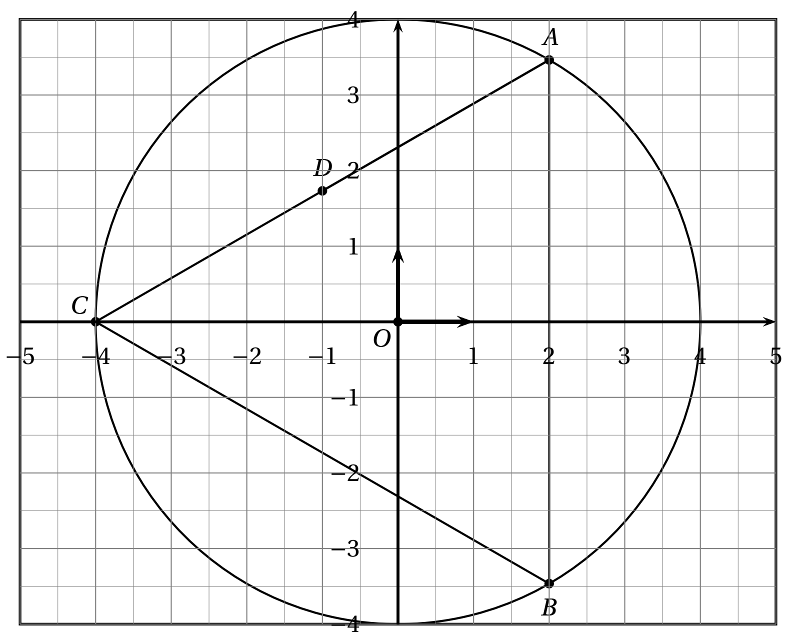
On en déduit que l'équation admet deux racines complexes conjuguées $z_A = \frac{4-4\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_B = 2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Les solutions de l'équation sont donc -4, $2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

2. $|z_A| = \sqrt{4+12} = 4$.

Un argument θ de z_A vérifie : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Voir la figure.



3. a. $|z_A| = |z_B| = 4$ car les deux nombres complexes sont conjugués. De plus $|z_C| = 4$. On en déduit que les points A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 4.

b. Voir la figure.

c. Montrons que ABC est un triangle équilatéral. $AC = |z_A - z_C| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Par symétrie $BC = 4\sqrt{3}$. $AB = |z_B - z_A| = \left|4\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = 4\sqrt{3}$. Donc, ABC est un triangle équilatéral.

Donc, D est à la fois le pied de la hauteur et de la médiane. On en déduit que le triangle ABD est rectangle en D.

PROBLÈME **10 points**

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
On démontre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. $f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x} = \frac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x}$.

b. Les facteurs (e^x+1) et e^x sont strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de (e^x-1).
Or $(\mathrm{e}^x-1) > 0$ si et seulement si $x > 0$.
On en déduit le tableau de variations avec $f(0) = \mathrm{e}^0 - \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^0} = 1 - \dfrac{5}{2} + 1 = -\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. On calcule le discriminant $\Delta = 9$, il y a donc deux solutions réelles $X_1 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = 2$.

b. $f(x) = 0$ si et seulement si $\mathrm{e}^x - \frac{5}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$. En réduisant au même dénominateur on obtient : $\dfrac{2\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 5\mathrm{e}^x + 2}{2\mathrm{e}^x} = 0$. Or comme e^x est non nul, cela revient à résoudre l'équation $2\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 5\mathrm{e}^x + 2 = 0$.

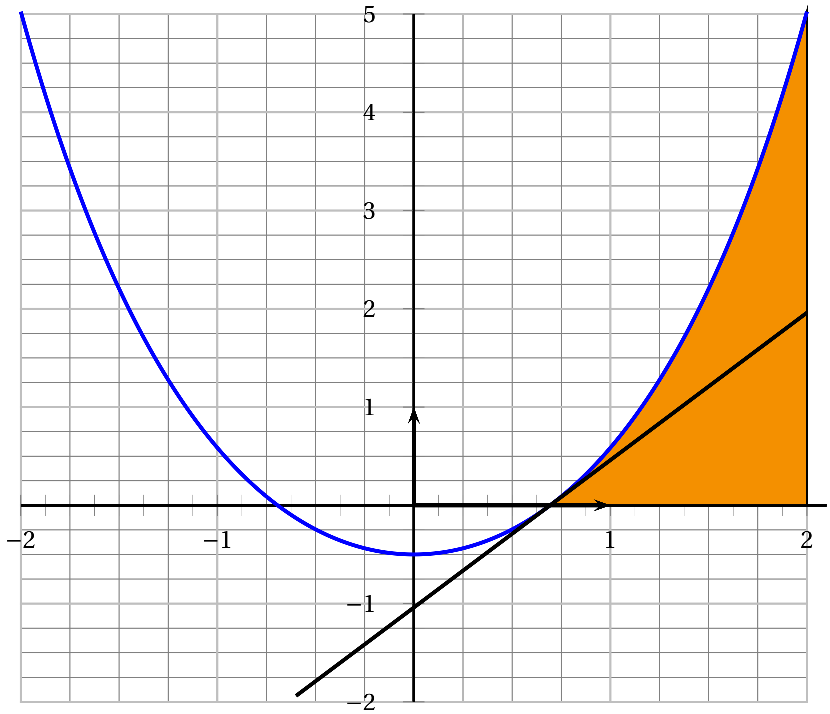
c. On a posé $X = \mathrm{e}^x$, et on a vu qu'il y a deux solutions $X_1 = \dfrac{1}{2} = \mathrm{e}^{x_1}$ donc grâce à la croissance de la fonction ln, $x_1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ et de même $X_2 = 2 = \mathrm{e}^{x_2}$ donne $x_2 = \ln(2)$.

d. Les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont $(-\ln(2)\,;\,0)$ et $(\ln(2)\,;\,0)$.

e. La fonction est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ donc $f(x) > 0$ pour $x < -\ln(2)$ et positif entre $\ln(2)$ et 0. Sur $\mathbb{R}^+$ la fonction est croissante, la fonction est donc négative entre 0 et $\ln(2)$ puis positive pour $x > \ln(2)$.

4. Une équation de la tangente au point d'abscisse $a = \ln(2)$ est donnée par : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Ce qui donne : $y = \frac{3}{2}(x - \ln(2)) = \frac{3}{2}x - \frac{3\ln(2)}{2}$.

5. Voir la figure.



6. **a.** $F'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{5}{2} + \mathrm{e}^{-x} = f(x)$. Donc F est une primitive de f.

b.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\ln(2)}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{\ln(2)}^{2} \\ &= \mathrm{e}^2 - 5 - \frac{1}{\mathrm{e}^2} - \mathrm{e}^{\ln(2)} + \frac{5}{2}\ln(2) + \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(2)}} \\ &= \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2} - 6,5 + \frac{5}{2}\ln(2)\text{u. a.} \end{aligned}$$

c. Voir la figure.

d. $A = 8I = 8\mathrm{e}^2 - 8\mathrm{e}^{-2} + 20\ln(2) - 52 \approx 19,89$ cm^2.