Corrigé du baccalauréat STI Métropole septembre 2008 Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

1. **a.** $P(3) = 3^3 - 3^2 - 2 \times 3 - 12 = 27 - 9 - 6 - 12 = 0.$

   On peut donc en déduire que P est factorisable par $z - 3$.

   b. $(z-3)\left(az^2 + bz + c\right) = P(z) = z^3 - z^2 - 2z - 12 \iff az^3 + bz^2 + cz - 3z^2 - 3bz - 3c =$

   $z^3 - z^2 - 2z - 12 \iff az^3 + (b-3)z^2 + +(c-3b)z - 3c = z^3 - z^2 - 2z - 12 \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b-3 & = & -1 \\ c-3b & = & -2 \\ -3c & = & -12 \end{array}\right.$

   $\iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b-3 & = & -1 \\ c-3b & = & -2 \\ -3c & = & -12 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & 2 \\ c-3b & = & -2 \\ c & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & 2 \\ 4-6 & = & -2 \\ c & = & 4 \end{array}\right.$

   Donc $P(z) = (z-3)\left(z^2 + 2z + 4\right)$.

2. **a.** $z^2 + 2z + 4 = 0 \iff (z+1)^2 - 1 + 4 = 0 \iff (z+1)^2 + 3 = 0 \iff$

   $(z+1)^2 - \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 = 0 \iff \left(z + 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(z + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) = 0.$

   L'équation a donc deux solutions complexes : $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   b. On a donc $P(z) = 0 \iff z = 3$ ou $z = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Partie B

1. **a.** $|z_A|^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow |z_A| = 2$.

   On peut alors écrire $z_A = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

   Un argument de z_A est donc $\dfrac{2\pi}{3}$.

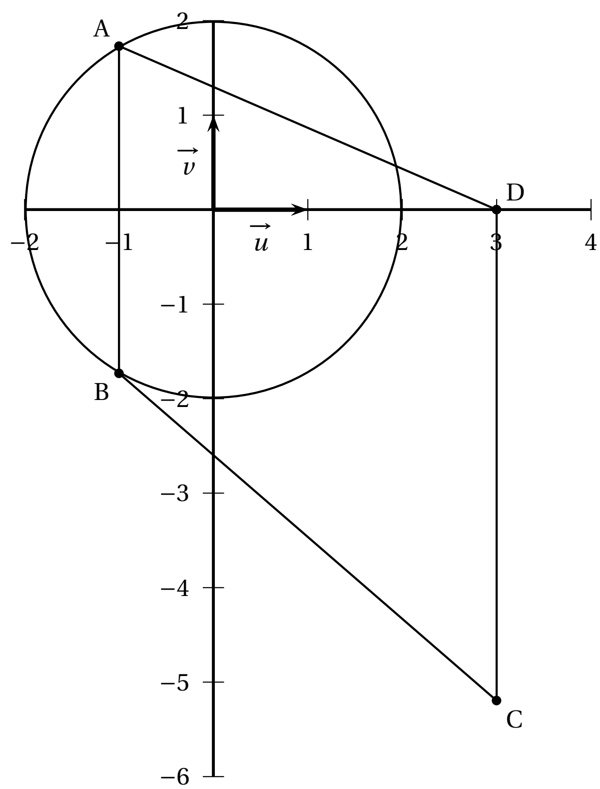
   Finalement $z_A = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

   b. On remarque que $z_B = \overline{z_A} = \overline{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

2. Voir plus bas

   a. On a $z_{\overrightarrow{DC}} = -3\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\overrightarrow{AB}} = -2\mathrm{i}\sqrt{3}$, d'où $z_{\overrightarrow{DC}} = \dfrac{3}{2} z_{\overrightarrow{AB}} \iff \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les droites (DC) et (AB) sont parallèles.

   b. ABCD a deux côtés opposés parallèles : c'est un trapèze.



EXERCICE 2 **4 points**

	Qualité supérieure	Qualité ordinaire	Qualité « premier prix »	Total
Producteur Lavigne	100	200	500	800
Producteur Olivier	400	500	300	1200
Total	500	700	800	2 000

Tableau 2 : répartition des pièces en fonction de leur origine et de leur qualité.

1. **a.** Voir plus haut.

   b. Il y a 500 pièces « premier prix » de chez Lavigne et 500 pièces ordinaire de chez Olivier soit en tout 1 000 pièces ayant une durée de vie de deux ans.

2. **a.** D'après la question précédente la probabilité est $\frac{1\,000}{2\,000} = \frac{1}{2} = 0,5$.

   b. Il y a 500 pièces de durée de vie deux ans sur les 800 pièces de chez Lavigne. La probabilité cherchée est donc de $\frac{800}{800} = \frac{5}{8} = 0,625$.

3. **a.** Il y a $200 + 400 = 600$ dont la durée de vie est de trois ans. La probabilité cherchée est donc égale à $\frac{600}{2\,000} = \frac{3}{10} = 0,3$.

   b. On a de même $p(X = 5) = \frac{100}{2\,000} = \frac{1}{20} = 0,05$ et
   $p(X = 1) = 1 - (0,625 + 0,3 + 0,05) = 1 - 0,975 = 0,025$. D'où le tableau :

$X = x_i$	5	3	2	1
$p(X = x_i)$	0,05	0,3	0,625	0,025

c. $E(X) = 5 \times 0,05 + 3 \times 0,3 + 2 \times 0,625 + 1 \times 0,025 = 0,25 + 0,9 + 1,25 + 0,025 = 2,425$.
Cette espérance représente la durée de vie moyenne d'une pièce.

PROBLÈME **4 points**

Partie A Étude de la fonction f

1. **a.** On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.
Ceci montre que la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de moins l'infini.

b. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. En posant $u(x) = 1 + \mathrm{e}^x$, $f(x) = \ln u(x) - 1$, donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u'(x) = \mathrm{e}^x$.

$f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$.

a. On sait que $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, donc $1 + \mathrm{e}^x > 1 > 0$ et finalement le quotient $f'(x)$ est lui aussi supérieur à zéro : la fonction est donc croissante sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations (avec $f(0) = \ln(2) - 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$ $\ln(2) - 1$ $\nearrow$	$+\infty$

b. On a $f'(0) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

D'où $M(x\,;\,y) \in \mathrm{T} \iff y - (\ln(2) - 1) = \dfrac{1}{2}(x - 0) \iff y = \dfrac{1}{2}x + \ln(2) - 1$.

3. **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) - (x-1) = \ln(1 + \mathrm{e}^x) - 1 - x + 1 = \ln(1 + \mathrm{e}^x) - x = \ln(1 + \mathrm{e}^x) - \ln(\mathrm{e}^x)$.
D'après la question précédente : $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x) - \ln(\mathrm{e}^x) = \ln \dfrac{1 + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-x} + 1)$.

b. D'après la question précédente :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\mathrm{e}^{-x} + 1\right)$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} + 1 = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\mathrm{e}^{-x} + 1\right) = 0$.
Ceci montre que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

c. D'après la question précédente la différence $f(x) - (x - 1)$ est égale à $\ln(\mathrm{e}^{-x} + 1)$.
Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $\mathrm{e}^{-x} + 1 > 1$, donc $\ln(\mathrm{e}^{-x} + 1) > \ln 1 = 0$.
Ceci montre que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite Δ d'équation $y = x - 1$.

4. En prenant comme unité graphique 2 cm sur chaque axe, construire sur une feuille de papier millimétré la droite T, la droite Δ, la droite d'équation : $x = 1$, et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Partie B Encadrement d'une aire

1.

2. Voir la figure

3. On voit que sur [1 ; 2] la droite D est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4. **a.** $I = \displaystyle\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = 2 - 2 - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$ (évident sur la figure).

$J = \displaystyle\int_1^2 (0,8x - 0,2)\,\mathrm{d}x = \left[0,4x^2 - 0,2x\right]_1^2 = 1,6 - 0,4 - 0,4 + 0,2 = 1.$

b. On en déduit d'après l'hypothèse faite que

$$I \leqslant \mathscr{A} \leqslant J \iff \dfrac{1}{2} \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1.$$