Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie mécanique, civil
Métropole septembre 2006

EXERCICE 1 **4 points**

1. $\left(z^2+9\right)\left(z^2-9z+27\right)=0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z^2+9 & = & 0\\ z^2-9z+27 & = & 0\end{array}\right.$

La première équation a pour solutions : 3i et −3i.

Pour la seconde : $\Delta = 81-4\times 27=-27=(3\mathrm{i}\sqrt{3})^2$; elle a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{9+3\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{9+3\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

2. a.
- $3\mathrm{i}=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$;
- $|z_B|^2=\frac{81}{4}+\frac{27}{4}=\frac{108}{4}=27 \Rightarrow |z_B|=3\sqrt{3}$;

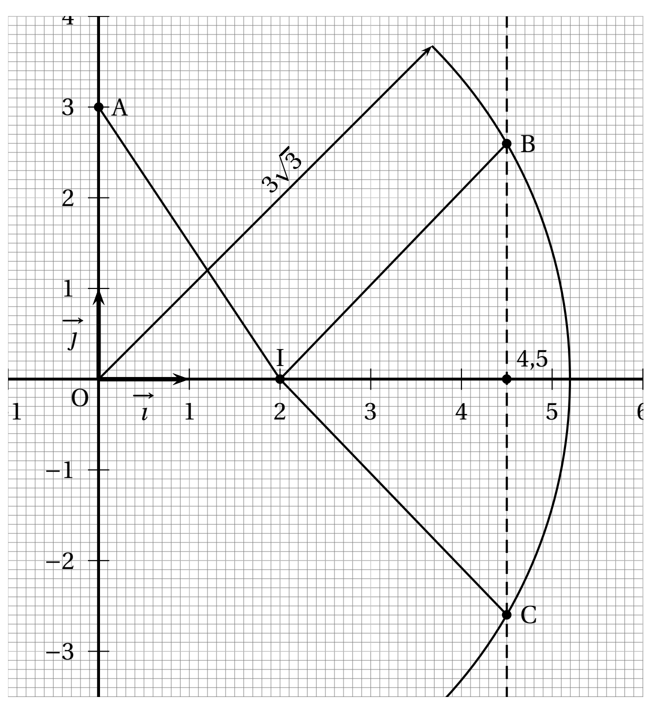
  On peut donc écrire $z_B=3\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)=3\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$;
- Comme z_C est le conjugué de z_B, on a $z_C=3\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

b. $\mathrm{IA}^2=|3\mathrm{i}-2|^2=9+4=13 \Rightarrow \mathrm{IA}=\sqrt{13}$.

$\mathrm{BI}^2=\left|2-\dfrac{9}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|^2=\left|-\dfrac{5}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|^2=\dfrac{25}{4}+\dfrac{27}{4}=\dfrac{52}{4}=13 \Rightarrow \mathrm{BI}=\sqrt{13}$;

$\mathrm{CI}^2=\left|2-\dfrac{9}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|^2=\left|-\dfrac{5}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|^2=\dfrac{25}{4}+\dfrac{27}{4}=\dfrac{52}{4}=13 \Rightarrow \mathrm{CI}=\sqrt{13}$. $\mathrm{IA}=\mathrm{BI}=\mathrm{CI}=\sqrt{13}$ montrent que A, B et C sont sur un même cercle de centre I et de rayon $\sqrt{13}$

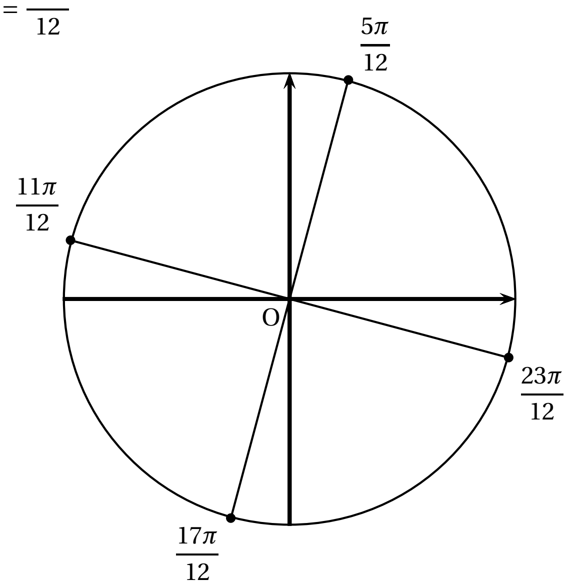
c.



EXERCICE 2 **4 points**

1. $y'' + 16y = 0, \iff y'' + 4^2 y = 0,\ y$. On sait que les solutions sont de la forme :
$y = A\cos 4x + B\sin 4x,\ A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$.
2. La solution $f(x) = A\cos 4x + B\sin 4x$ a pour dérivée : $f'(x) = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x$.
Donc $\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & \dfrac{1}{10} \\ f'(0) & = & -\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & \dfrac{1}{10} \\ 4B & = & -\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & \dfrac{1}{10} \\ B & = & -\dfrac{\sqrt{3}}{10}\end{array}\right.$
La solution vérifiant les conditions est définie par : $f(x) = \dfrac{1}{10}\cos 4x - \dfrac{\sqrt{3}}{10}\sin 4x$
3. On peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2}\cos 4x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x\right) = \dfrac{1}{5}\left(\cos -\frac{\pi}{3}\cos 4x + \sin -\frac{\pi}{3}\sin 4x\right) = \dfrac{1}{5}\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$,
d'après la formule d'addition : $\cos a\cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$.
4. **a.** $f(x) = \dfrac{1}{5} \iff \dfrac{1}{5}\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{5} \iff \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \iff 4x + \frac{\pi}{3} = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff$
$4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

   b. On doit avoir :
$0 \leqslant -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \leqslant 2\pi \iff \frac{\pi}{12} \leqslant k\frac{\pi}{2} \leqslant 2\pi + \frac{\pi}{12} \iff \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{12} \leqslant k\frac{\pi}{2}\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{2}{\pi}\left(2\pi + \frac{\pi}{12}\right)$
$\iff \frac{1}{6} \leqslant k \leqslant 4 + \frac{1}{6}$.
Donc les valeurs possibles pour k sont 1, 2, 3 et 4.
$k = 1,\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{12}$;
$k = 2\ x = -\frac{\pi}{12} + 2\frac{\pi}{2} = \dfrac{11\pi}{12}$;
$k = 3\ x = -\frac{\pi}{12} + 3\frac{\pi}{2} = \dfrac{17\pi}{12}$;
$k = 4\ x = -\frac{\pi}{12} + 4\frac{\pi}{2} = \dfrac{23\pi}{12}$



PROBLÈME **12 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

1. g somme de fonctions dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :
$g'(x) = 4x - \dfrac{4}{x} = \dfrac{4x^2 - 4}{x}$.

2. Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme $4x^2 - 4$ ou encore $1 - x^2$; celui-ci est positif sauf entre les racines -1 et 1.
Donc sur $]0\,;\,1[$, $g'(x) < 0$: la fonction g est décroissante ;
sur $[1\,;\,+\infty[$, $g'(x) > 0$: la fonction g est croissante.
On a $g(1) = 2 \times 1^2 - 4\ln 1 + 4 = 6$. D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$\searrow$	6	$\nearrow$	

3. Le minimum $f(1) = 6$ de la fonction est supérieur à zéro : la fonction g est donc positive non nulle sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. a. On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

b. Géométriquement le résultat précédent montre que l'axe des ordonnées $y = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.

2. a. On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Soit la fonction d définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $d(x) = f(x) - (2x - 3) = 4\dfrac{\ln x}{x}$.

On a vu que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} d(x) = 0$, donc la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c. La position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ est donnée par le signe de $d(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ c'est-à-dire du signe de $\ln x$;
donc sur $]0\,;\,1[$, $d(x) < 0$ ce qui signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est sous la droite $\mathscr{D}$;
sur $]1\,;\,+\infty[$, $d(x) > 0$ ce qui signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite $\mathscr{D}$.

3. f somme de fonctions dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle,

$$f'(x) = 2 + 4\left(\frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2}\right) = 2 + 4\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right) = \frac{2x^2 + 4 - 4\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

4. Comme $x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. Or on a vu à la partie A que $g(x) > 0$ si $x > 0$; donc la fonction f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$. D'où le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. a. La fonction f est croissante sur $[1\,;\,2]$; $f(1) = 2 - 3 + 4\dfrac{\ln 1}{1} = -1 < 0$ et
$f(2) = 4 - 3 + 4\dfrac{\ln 2}{2} = 1 + 4\dfrac{\ln 2}{2} > 0$.
Conclusion : il existe un réel unique α de $[1\,;\,2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

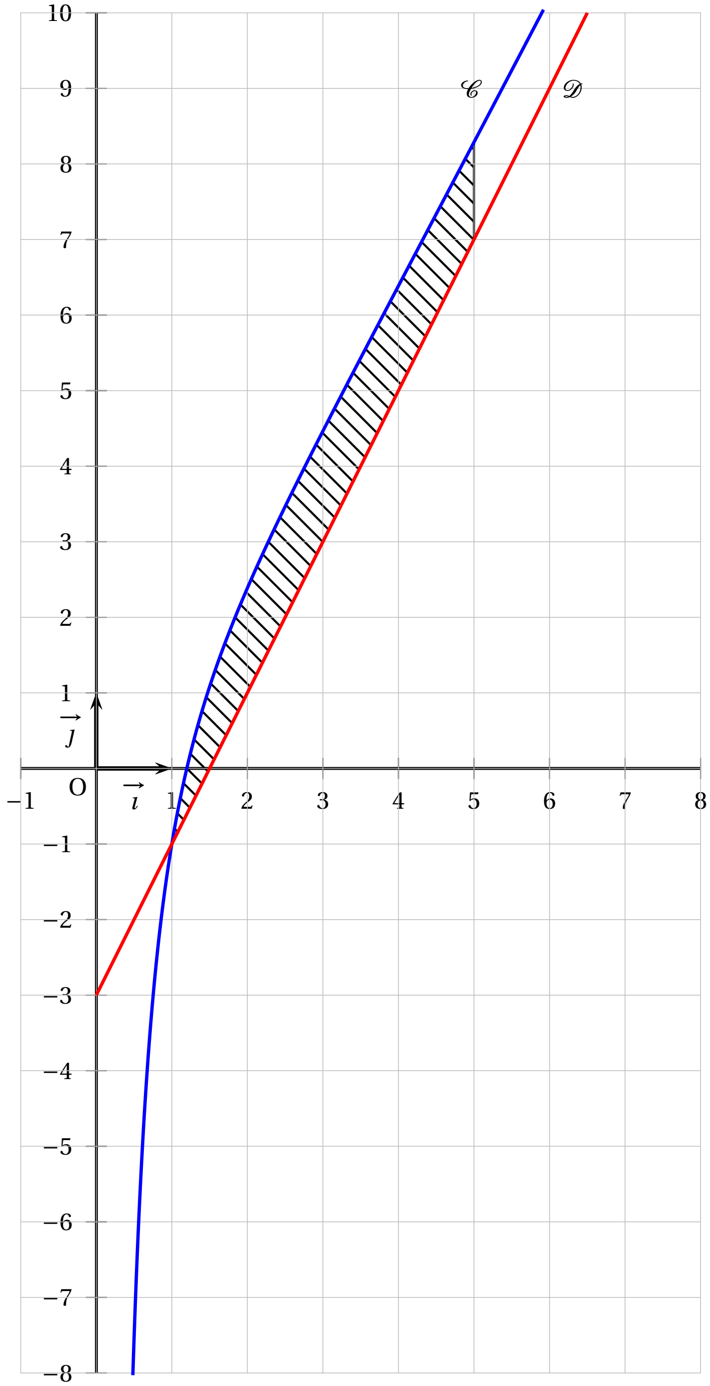
b. La calculatrice donne : $f(11981) \approx -0{,}0004$ et $f(11982) \approx 0{,}00004$.
Donc $11981 < \alpha < 11982$.

6. Le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ est égale à 2. Il faut donc résoudre l'équation :
$f'(x) = 2 \iff \dfrac{2x^2 + 4 - 4\ln x}{x^2} = 2 \iff 2x^2 + 4 - 4\ln x = 2x^2 \iff$
$4 - 4\ln x = 0 \iff 4 = 4\ln x \iff 1 = \ln x \iff x = \mathrm{e}$.
7. Voir la figure à la fin.

Partie C

1. Voir la figure
2. On a vu à la question 2. c. de la partie B que $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}$ pour $x > 1$.
L'aire de la partie est donc égale, en unité d'aire à l'intégrale
$\displaystyle\int_1^5 f(x) - (2x-3)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 4\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.
3. **a.** Pour $x > 0$, la fonction H est dérivable et sur cet intervalle
$H'(x) = 2\ln x \times \dfrac{1}{x} = 2\dfrac{\ln x}{x}$.

   b. D'après le résultat précédent :
$\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^5 4\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^5 2\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\left[(\ln x)^2\right]_1^5 = 2(\ln 5)^2 - 2(\ln 1)^2 = 2(\ln 5)^2$.
L'unité d'aire étant égale à $1 \times 1 = 1$ cm^2, on a
$\mathcal{A} = 2(\ln 5)^2\ \left(\text{cm}^2\right) \approx 5,180 \approx 5,18\text{cm}^2$ à 1 mm^2 près.



Si vous photocopiez ce corrigé pensez à en créditer l'**A. P. M. E. P.**, merci