Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Métropole 17 juin 2008 Génie mécanique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Partie I : Q. C. M.

1. $Z_1 = z_A z_B = 4e^{i\frac{\pi}{6}} \times 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 16e^{-i\frac{\pi}{2}} = -16i$. Réponse C.

2. $Z_2 = z_A^6 = \left(4e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 4^6 e^{i\pi} = -4^6$. Réponse B.

3. $\overline{z_A} = \overline{4e^{i\frac{\pi}{6}}} = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Réponse C.

4. $z_C = -2+2i$.
   Calcul du module : $|z_C|^2 = 4+4 = 4\times 2 \Rightarrow |z_C| = 2\sqrt{2}$.
   Calcul d'un argument : on peut écrire $z_C = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
   Réponse B.

Partie II

1. Soit M un point du plan d'affixe z.
   a. $|z - z_A| = AM$
   b. $|z - z_A| = |z - z_B| \iff AM = BM$, donc M est équidistant de A et de B. L'ensemble cherché est la médiatrice de [AB].
   c. $z_A = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\sin\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}+2i$.
   $z_B = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2+2i\sqrt{3}$.
   D'où $|z_C - z_A| = \left|-2+2i-2\sqrt{3}-2i\right| = \left|-2-2\sqrt{3}\right| = 2+2\sqrt{3}$.
   Et $|z_C - z_B| = \left|-2+2i+2+2i\sqrt{3}\right| = \left|i(2+2\sqrt{3}\right| = 2+2\sqrt{3}$.
   Conclusion $C \in \mathcal{D}$.

2. Calculons $AB^2 = |z_B - z_A|^2 = \left|-2+2i\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2i\right|^2 = \left(-2-2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}+2\right)^2 = 4+12+8\sqrt{3}+12+4+8\sqrt{3} = 32+16\sqrt{3}$.
   Or on a vu que $AC = \left(2+2\sqrt{3}\right) \Rightarrow AC^2 = 4+12+8\sqrt{3} = 16+8\sqrt{3} = BC^2$.
   Donc $32+16\sqrt{3} = 16+8\sqrt{3}+16+8\sqrt{3} \iff AB^2 = AC^2+BC^2 \iff$ ABC est un triangle rectangle en C d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

3. Conclusion le triangle ABC est rectangle en C et isocèle en C.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** Sur $[0\,;\,2\pi]$, $f'(x) = -\sin x - \dfrac{1}{2}\times 2\sin(2x) = -\sin(x) - \sin(2x)$.

b. On sait que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, donc $f'(x) = -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = -\sin(x)[1 + 2\cos(x)]$.

2. $\sin(x)[1+2\cos(x)] = 0 \iff \begin{cases} \sin(x) &= 0 \\ 1+2\cos(x) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x) &= 0 \\ \cos(x) &= -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

La première équation a pour solutions 0, π et 2π ;

La seconde a pour solutions : $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$.

Conclusion : la dérivée $f'(x)$ s'annule en 0, $\dfrac{2\pi}{3}$, π, $\dfrac{4\pi}{3}$ et 2π.

3. a.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
Signe de $f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

b. Les extremums de la fonction :

$f(0) = 1 + 0,5 + 1 = 2,5$;

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + 0,5 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 = -0,5 - 0,25 + 1 = 0,25$;

$f(\pi) = -1 + 0,5 \times 1 + 1 = 0,5$;

$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + 0,5 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 = -0,5 - 0,25 + 1 = 0,25$;

$f(2\pi) = 1 + 0,5 \times 1 + 1 = 2,5$.

D'où le tableau de variations de la fonction :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
Signe de $f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	2,5	$\searrow$	0,25	$\nearrow$	0,5	$\searrow$	0,25	$\nearrow$	2,5

4. Voir plus bas.

Problème **10 points**

Partie A: limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$.

Géométriquement ceci signifie que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 4$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.

2. **a.** $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4 = \left(\mathrm{e}^{x}\right)^2 - 5\mathrm{e}^{x} + 4$; posons $X = \mathrm{e}^{x}$, alors $f(x) = X^2 - 5X + 4$ qui est un trinôme en X.

$\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$; les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont donc $X_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4$ et $X_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1$.

Donc $f(x) = (X-5)(X-1) = \left(\mathrm{e}^{x} - 4\right)\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.

b. Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} - 4 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} - 1 = +\infty$ et finalement $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B : intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses

Il faut résoudre $f(x) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l c l} \mathrm{e}^{x} - 4 & = & 0 \\ \mathrm{e}^{x} - 1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} \mathrm{e}^{x} & = & 4 \\ \mathrm{e}^{x} & = & 1 \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & \ln 4 = 2\ln 2 \\ x & = & \ln 1 = 0 \end{array}\right.$

Conclusion : la courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses en $x = 0$ et $x = 2\ln 2$.

Partie C : étude des variations de la fonction f

1. **a.** En utilisant l'écriture initiale : $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 5\right)$.

b. On sait que $\mathrm{e}^{x} > 0$ quel que soit le réel x ; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $2\mathrm{e}^{x} - 5$ qui s'annule si $2\mathrm{e}^{x} = 5 \iff x = \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

De plus $2\mathrm{e}^{x} - 5 > 0 \iff 2\mathrm{e}^{x} > 5 \iff \mathrm{e}^{x} > \dfrac{5}{2} \iff x > \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

On a de même $2\mathrm{e}^{x} - 5 > 0 \iff x < \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

2. On a vu que $x = \ln\left(\dfrac{5}{2}\right) \iff \mathrm{e}^{x} = \dfrac{5}{2}$.

Donc puisque $f(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 4\right)\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)$, alors $f\left(\ln\dfrac{5}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2} - 4\right)\left(\dfrac{5}{2} - 1\right) = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{3}{2} = -\dfrac{9}{4}$.

3. Le signe de $2\mathrm{e}^{x} - 5$ étant celui de $f'(x)$ on a alors les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\ln\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Voir plus bas.

Partie D : calcul d'une aire

1. Une primitive de e^{2x} est $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$, donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4x$.

2. **a.** On a vu que $f(0) = f(\ln 4) = 0$ et que sur l'intervalle $[0~;~\ln 4]$, la fonction f est négative.

Donc l'aire de la surface est égale à : $\displaystyle\int_0^{\ln 4} -f(x)\,\mathrm{d}x = [-F(x)]_0^{\ln 4} = F(0) - F(\ln 4) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^0 - 5\mathrm{e}^0 + 4\times 0 - \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln 4} - 5\mathrm{e}^{\ln 4} + 4\ln 4\right) = \frac{1}{2} - 5 - 8 + 20 - 4\ln 4 = \frac{15}{2} - 4\ln 4$ (u. a.)

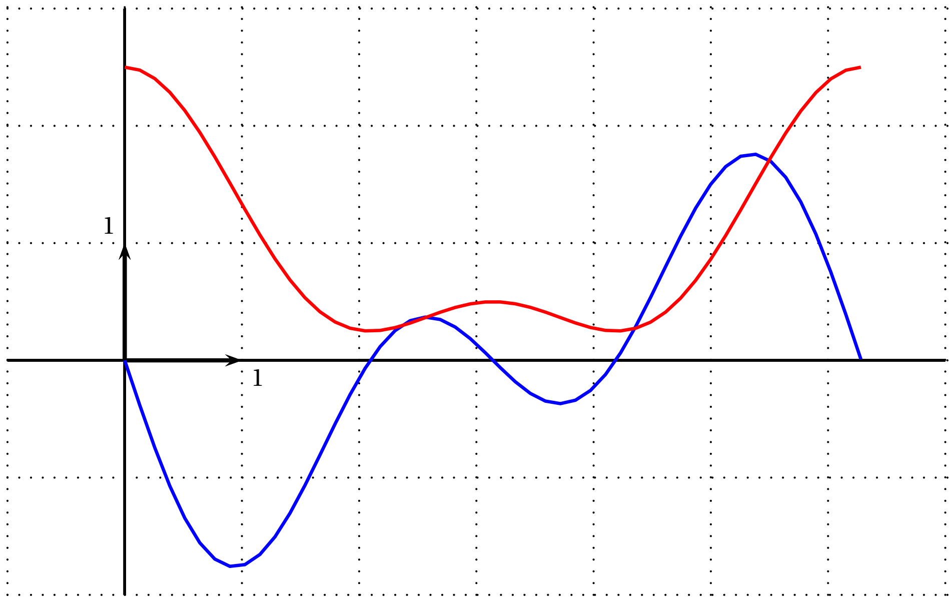
Comme 1 u. a. $= 2\times 1 = 2$ cm^2, l'aire en cm^2 de la surface est égale à $15 - 8\ln 4$ cm^2.

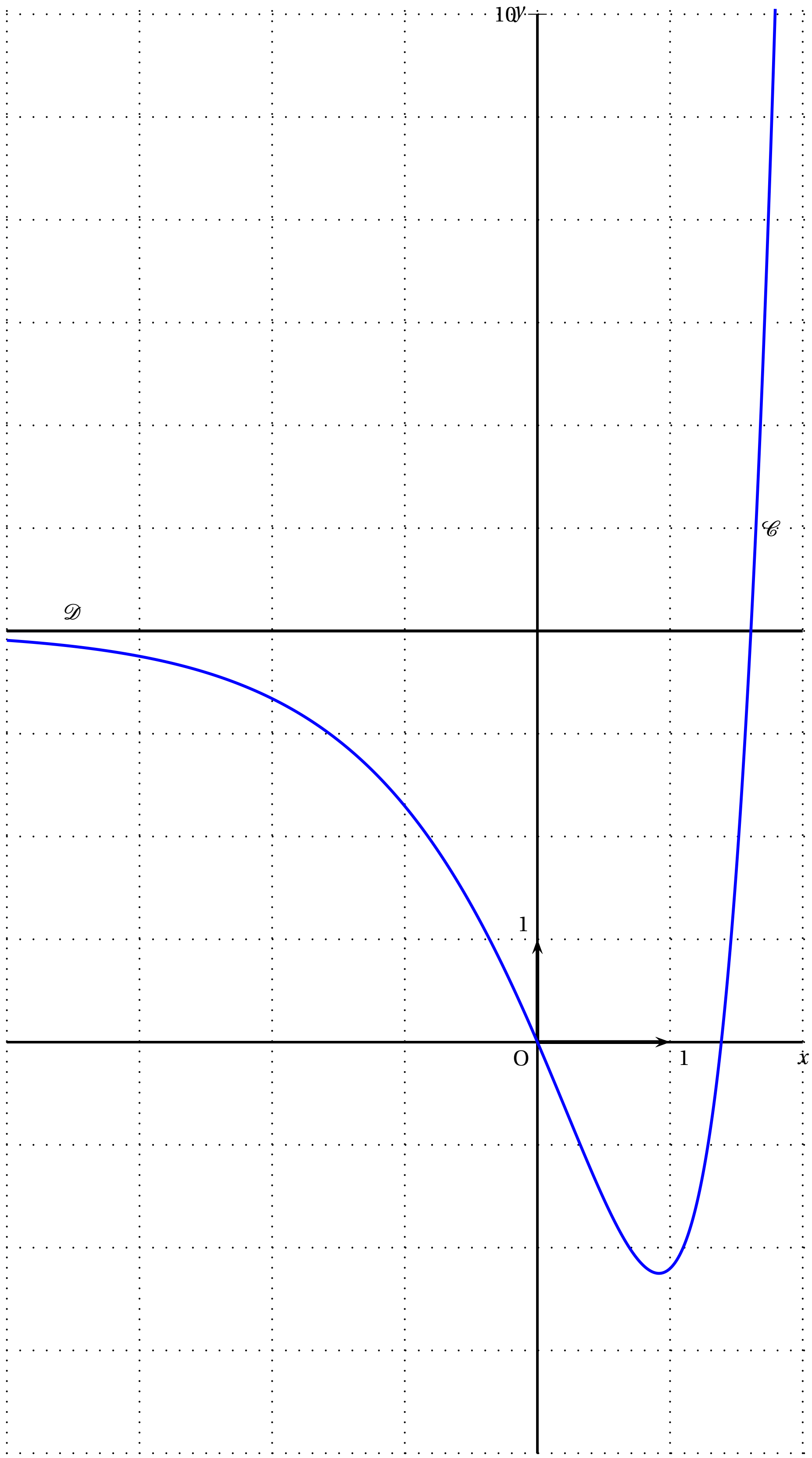
b. La calculatrice livre : $15 - 8\ln 4 \approx 3,909 \approx 3,91$ cm^2 au millimètre carré près

ANNEXE à l'exercice 2

(à compléter et à rendre avec la copie)

La courbe préconstruite ci-dessous est la représentation graphique de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.




10
y
𝒞
𝒟
1
O
1
x