Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie mécanique, civil
Métropole 22 juin 2010

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

1.

	Pièces défectueuses	Pièces non défectueuses	Total
Ouest	22	1 078	1 100
Est	27	873	900
Total	49	1 951	2 000

2. **a.**

On a $p(E) = \dfrac{900}{2000} = \dfrac{450}{1000} = 0,45$.

$p(D) = \dfrac{22+27}{2000} = \dfrac{49}{2000} = 0,0245$.

$p(E \cap D) = \dfrac{27}{2000} = 0,0135$.

$p(E \cup D) = p(E) + p(D) - p(E \cap D) = 0,45 + 0,0245 - 0,0135 = 0,461$.

b.

Il faut la calculer la probabilité que la pièce vienne de l'atelier Ouest sachant qu'elle est défectueuse, soit :

$p_D\left(\overline{E}\right) = \dfrac{p\left(\overline{E} \cap D\right)}{p(D)} = \dfrac{\frac{22}{2000}}{\frac{49}{2000}} = \dfrac{22}{49} \approx 0,449$.

Partie B

1. Le coût journalier de production est : $7 \times 1800 = 12600$ €.
Le coût de réparation des pièces défectueuses est : $20 \times 3 + 24 \times 5 = 60 + 120 = 180$ €.
La vente rapporte : $1800 \times 10 = 18000$ €.
Le gain journalier de l'entreprise est donc égal à :
$18000 - 12600 - 180 = 5220$ €.

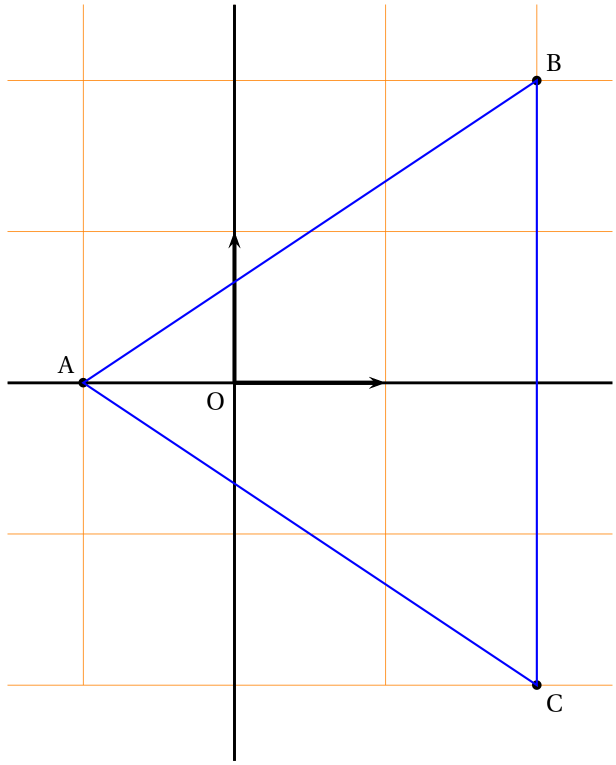
2. Sur une année de 300 jours ouvrables le gain est égal à :
$300 \times 5220 = 1566000$ €.

3. Le nouveau gain journalier est égal à :
$1756(10-7) = 1756 \times 3 = 5268$ €.
Le nouveau gain annuel est égal à :
$300 \times 5268 - 100000 = 1480400 < 1566000$.
Conclusion : la stratégie n'est pas rentable.

EXERCICE 2 **4 points**

1. **a.** $P(-1) = (-1)^3 - 3\times(-1)^2 + 4\times(-1) + 8 = -1-3-4+8 = 0$.
(-1) est une racine de P.
b. En développant :
$(z+1)\left(z^2+az+b\right) = z^3+az^2+bz+z^2+az+b = z^3+(a+1)z^2+(b+a)z+b$.
En identifiant ce polynôme à z^3-3z^2+4z+8, on obtient le système
$$\left\{\begin{array}{lcll} a+1 & = & -3 & (1)\\ a+b & = & 4 & (2)\\ b & = & 8 & (3)\end{array}\right.$$
On a donc $b=8$ et en substituant dans (2), on trouve $a=-4$ comme avec (1).
Donc $P(z) = z^3-3z^2+4z+8 = (z+1)\left(z^2-4z+8\right)$.
c. En utilisant le résultat précédent :
$P(z)=0 \iff (z+1)\left(z^2-4z+8\right) \iff$
$$\left\{\begin{array}{lcl} z+1 & = & 0\\ z^2-4z+8 & = & 0\end{array}\right. .$$
On a déjà vu la solution (-1) ; pour l'équation du second degré :
$\Delta = 16-4\times 8 = -16 = (4\text{i})^2$.
L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :
$\dfrac{4+4\text{i}}{2} = 2+2\text{i}$ et la solution conjuguée $2-2\text{i}$.
$$S = \{-1\ ;\ 2+2\text{i}\ ;\ 2-2\text{i}\}$$

2. **a.** Voir la figure plus bas.
b. $z_{\text{A}} = -1 = 1\text{e}^{\text{i}\pi}$: le module est 1 et un argument est π ;
$z_{\text{B}} = 2+2\text{i}$; donc $|z_{\text{B}}|^2 = 2^2+2^2 = 8 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow |z_{\text{B}}| = 2\sqrt{2}$.
On peut factoriser par le module :
$z_{\text{B}} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$: un argument de z_{B} est donc $\dfrac{\pi}{4}$.
Comme $z_{\text{C}} = \overline{z_{\text{B}}}$ son module est égal à $2\sqrt{2}$ et un de ses arguments est $-\dfrac{\pi}{4}$.
On a donc : $z_{\text{B}} = 2\sqrt{2}\text{e}^{\frac{\pi}{4}}$ et $z_{\text{C}} = 2\sqrt{2}\text{e}^{-\frac{\pi}{4}}$.
c. B et C étant symétriques autour de (Ox), le triangle ABC est isocèle de base BC = 4 et de hauteur 3. Son aire est donc égale à :
$$\mathscr{A}(\text{ABC}) = \frac{4\times 3}{2} = 6 \text{ (u. a.)}$$
Comme l'unité d'aire est égale à $2\times 2 = 4$ cm^2, on a $\mathscr{A}(\text{ABC}) = 6\times 4 = 24$ cm^2.



PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. On sait que la solution générale de l'équation (F) est : $z(t) = K\mathrm{e}^{-0,1t},\ K \in \mathbb{R}$.
2. **a.** $y(t) = z(t) + 30 = K\mathrm{e}^{-0,1t} + 30 \Rightarrow y'(t) = z'(t) = -0,1z(t) = -0,1K\mathrm{e}^{-0,1t},\ K \in \mathbb{R}$.

   On a donc :

   $y'(t) + 0,1y(t) = -0,1K\mathrm{e}^{-0,1t} + 0,1\left(K\mathrm{e}^{-0,1t} + 30\right) =$

   $-0,1K\mathrm{e}^{-0,1t} + 0,1K\mathrm{e}^{-0,1t} + 3 = 3$.

   La fonction y définie par $y(t) = K\mathrm{e}^{-0,1t} + 30,\ K \in \mathbb{R}$ est donc une solution de l'équation différentielle (E).

   b. $y(t) = K\mathrm{e}^{-0,1t} + 30$ et $y(0) = 20 \Rightarrow K + 30 = 20 \iff K = -10$.

   La fonction solution de (E) et vérifiant $y(0) = 20$ est donc : $y(t) = -10\mathrm{e}^{-0,1t} + 30$.

Partie B

1. **a.** C'est la température pour $t = 0$, donc $f(0) = 30 - 10 = 20$.

   b. C'est $f(24) = 30 - 10\mathrm{e}^{-0,1\times 24} = 30 - 10\mathrm{e}^{-2,4} \approx 29,1°$ C.
2. **a.** $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,1t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 30$.

   b. Graphiquement : la droite d'équation $y = 30$ est tangente horizontale au graphe de f.

   c. Le résultat précédent montre qu'au bout d'un certain temps la température du lubrifiant va se rapprocher au maximum de 30 °C.

3. **a.** $f'(t) = -10 \times (-0,1)\mathrm{e}^{-0,1t} = \mathrm{e}^{-0,1t}$.

On sait que pour tout réel t, $\mathrm{e}^{-0,1t} > 0$: la dérivée est donc positive : la fonction f est croissante sur $[0~;~+\infty[$

b. Voir plus bas.

c. Il faut résoudre l'équation :

$f(t) = 28 \iff 30 - 10\mathrm{e}^{-0,1t} = 28 \iff 2 = 10\mathrm{e}^{-0,1t} \iff 1 = 5\mathrm{e}^{-0,1t} \iff \dfrac{1}{5} = \mathrm{e}^{-0,1t}$, soit en utilisant la croissance de la fonction ln :

$\ln\frac{1}{5} = -0,1t \iff -\ln 5 = -0,1t \iff \ln 5 = 0,1t \iff 10\ln 5 = t \approx 16,0944 \approx$16 h 6 min.

La température atteint 28 °C après approximativement 16 heures 6 min.

d. On a $V_m = \dfrac{1}{10-5}\displaystyle\int_5^1 0\left[30 - 10\mathrm{e}^{-0,1t}\right]\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{5}\left[30t + 100\mathrm{e}^{-0,1t}\right]_5^{10} =$

$60 + 20\mathrm{e}^{-1} - 30 - 20\mathrm{e}^{-0,5} \approx 25,227 \approx 25,2.$ °C

Annexe (à rendre avec la copie)