Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Polynésie juin 2008 Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **4 points**

1. La probabilité de tomber sur un secteur est proportionnelle à son aire ou encore à la mesure de l'angle au centre, soit pour un angle de mesure d en degrés par $\dfrac{d}{360}$. D'où la loi de probabilité :

d	150	100	50	35	15	10
$p(D=d)$	$\dfrac{150}{360}$	$\dfrac{100}{360}$	$\dfrac{50}{360}$	$\dfrac{35}{360}$	$\dfrac{15}{360}$	$\dfrac{10}{360}$
X	-3	0	1	3	7	12

2. La probabilité d'obtenir au moins trois euros est égale à la somme des probabilités d'obtenir 3, ou 7 ou 12 euros soit :
$\dfrac{35}{360}+\dfrac{15}{360}+\dfrac{10}{360}=\dfrac{60}{360}=\dfrac{1}{6}$.
3. **a.** On a $\mathrm{E}(X)=-3\times\dfrac{150}{360}+0\times\dfrac{100}{360}+1\times\dfrac{50}{360}+3\times\dfrac{35}{360}+7\times\dfrac{15}{360}+12\times\dfrac{10}{360}=$
$\dfrac{-450+50+105+105+120}{360}=\dfrac{-70}{360}=-\dfrac{7}{36}$.
   b. L'espérance mathématique est inférieure à zéro, le jeu est inéquitable pour le joueur.
4. **a.** Le calcul de l'espérance est le même sauf pour le dernier produit :
$\mathrm{E}(X)=\dfrac{-190+10(a-3)}{360}=\dfrac{10a-220}{360}$.
   b. $\mathrm{E}(X)=0\iff 10a-220=0\iff a=22$ (€).

EXERCICE 2 **4 points**

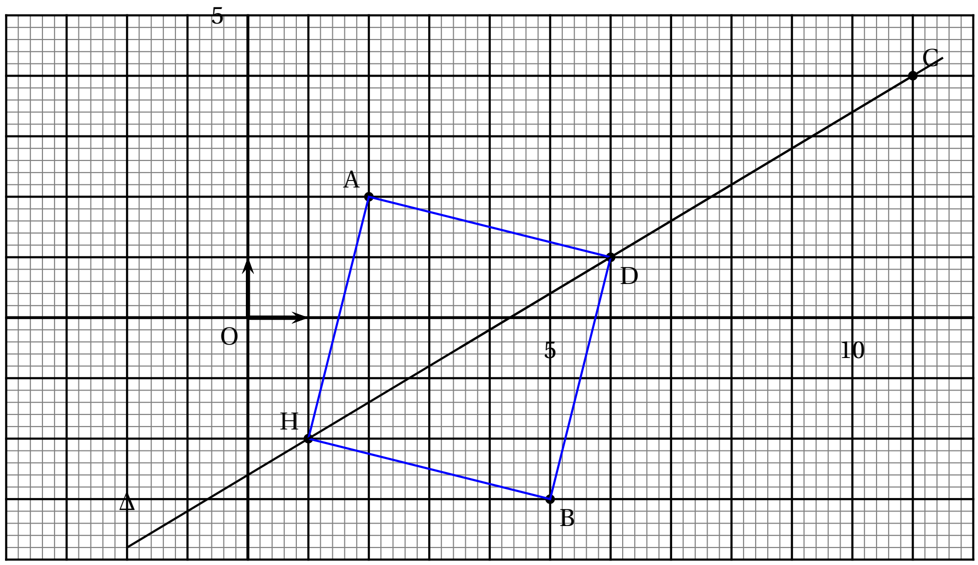
1. **a.** $\mathrm{a}=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+2\mathrm{i}$.
   b. Voir la figure plus bas.
2. On a $\mathrm{AC}=|z_\mathrm{C}-z_\mathrm{A}|^2=(11-2)^2+(4-2)^2=81+4=85$;
$\mathrm{BC}=|z_\mathrm{C}-z_\mathrm{B}|^2=(11-5)^2+(4+3)^2=36+49=85$.
On a donc $\mathrm{AC}^2=\mathrm{bC}^2=85\Rightarrow \mathrm{AC}=\mathrm{BC}$, donc ABC est un triangle isocèle en C.
3. **a.** $|z-a|=\mathrm{A}M$ et $|z-b|=\mathrm{B}M$.
   b. $|\mathrm{z - a}|=|\mathrm{z - b}|\iff \mathrm{A}M=\mathrm{B}M\iff M$ est équidistant de A et de B. Les points M appartiennent donc à la médiatrice de [AB].
   c. Comme CA = CB, C est équidistant de A et de B et appartient donc à Δ.
D'autre part $\mathrm{AD}^2=(6-2)^2+(1-2)^2=16+1=17$ et $\mathrm{BD}^2=(6-5)^2+(1+3)^2=1+16=17$, donc D est aussi équidistant de A et de B et D appartient à Δ.
4. On a aussi $\mathrm{AB}^2=(5-2)^2+(-3-2)^2=9+25=34$.
Donc $17+17=34\iff \mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}^2\iff$ ABD est un triangle isocèle rectangle en D d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

5. Si ADBH est un carré, c'est un parallélogramme : donc [AB] et [DH] ont le même milieu I. Le point H est donc le symétrique de D autour de I.

Or $\text{I}\left(\dfrac{7}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

Si $\text{H}(x\ ;\ y)$, alors $\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{7}{2} & = & \dfrac{6+x}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & = & \dfrac{1+y}{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}1 & = & x\\ -2 & = & y\end{array}\right.$

Donc $\text{H}(1\ ;\ -2)$.



PROBLÈME **12 points**

Partie A - Étude de la fonction f

1. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. D'après l'indication $\displaystyle\lim_{x\to 0} 2x - 1 - x\ln x = -1$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

b. D'après la question précédente l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.

3. a. f somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = +\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1-x}{x^2}$.

b. Comme $x^2 < 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$; donc $f'(x) > 0 \iff x < 1$ et $f'(x) < 0 \iff x > 1$. La fonction est donc croissante puis décroissante; elle a donc un extremum (maximum) en $x = 1$ égal à

$f(1) = 2 - 1 - \ln 1 = 1$.

D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\parallel -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. **a.** On a $f(0,1) = 2-10-\ln 0,1 \approx -5,7 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$. Sur $[0,1\,;\,10]$ la fonction f est dérivable et à valeurs dans l'intervalle $[f(0,1)\ ;\ f(1)]$ qui contient 0 : la fonction f s'annule donc une seule fois en x_1 dans cet intervalle.

Il en est de même dans l'intervalle $[1\,;\,10]$, la fonction s'annulant en x_2.

b. La calculatrice donne $0,31 < x_1 < 0,32$ et $6,30 < x_2 < 6,31$.

Partie B - Étude d'une tangente

1. $M(x\ ;\ y) \in \mathcal{T} \iff y - f(2) = f'(2)(x-2) \iff y - \left(2 - \dfrac{1}{2} - \ln 2\right) = -\dfrac{1}{4}(x-2) \iff y = \dfrac{3}{2} - \ln 2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2} \iff y = -\dfrac{1}{4}x + 2 - \ln 2.$

2. **a.** h est une somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et est donc dérivable sur cet intervalle et

$$h'(x) = f'(x) + \frac{1}{4} = \frac{1-x}{x^2} + \frac{1}{4} = \frac{4-4x+x^2}{4x^2} = \frac{(x-2)^2}{4x^2} = \left(\frac{x-2}{2x}\right)^2$$

b. $h'(x)$ étant un carré est positif ou nul : la fonction est donc croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

c. On a $h(2) = 2 - \dfrac{1}{2} - \ln 2 - \left(-\dfrac{2}{4} + 2 - \ln 2\right) = 0$.

La fonction h étant croissante on a donc :

$x < 2 \Rightarrow f(x) < 0$;

$x > 2 \Rightarrow f(x) > 0$;

$h(2) = 0$.

3. Comme $y = -\dfrac{1}{4}x + 2 - \ln 2$ est l'équation de $\mathcal{T}$, la fonction h donne la différence pour une valeur de x donnée, entre le point de $\mathcal{C}$ et le point de $\mathcal{T}$.

La question précédente montre donc que :

pour $x < 2$, le courbe $\mathcal{C}$ est sous la droite $\mathcal{T}$;

pour $x > 2$, le courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de la droite $\mathcal{T}$.

4. Voir la figure

Partie C Calcul d'une aire

1. G différence de deux fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et

$G'(x) = 1 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$.

2. La question précédente montre que $G(x)$ est une primitive de $-\ln x$.

3. **a.**

b. En supposant que l'unité d'aire est égale à 1 cm^2, on sait que

$$\mathcal{A} = \int_1^6 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^6 \left(2 - \frac{1}{x} - \ln x\right)\mathrm{d}x = \int_1^6 2\,\mathrm{d}x - \int_1^6 -\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \int_1^6 (-\ln x)\,\mathrm{d}x$$

$= [2x]_1^6 - [\ln x]_1^6 + [G(x)]_1^6 = [2x - \ln x + x - x\ln x]_1^6 = [3x - \ln x - x\ln x]_1^6 = 18 - \ln 6 - 6\ln 6 - 3 = 15 - 7\ln 6$

Soit finalement $\mathcal{A} \approx 2,46$ au centième près

Annexe : tracé de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$

Cette feuille est à compléter au fil des questions et à rendre avec la copie