Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Polynésie septembre 2009
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** $z^2-8z+41=0$; $\Delta=64-164=-100=(10\text{i})^2$.

   Il y a donc deux racines complexes : $z_1=\dfrac{8+10\text{i}}{2}=4+5\text{i}$ et $z_2=4-5\text{i}$.

   b. $z_3=\dfrac{1}{8}\left[-(4+5\text{i})^2-25+16\text{i}\right]=\dfrac{1}{8}(-16+25-40\text{i}-25+16\text{i})=\dfrac{1}{8}(-16-24\text{i})=-2-3\text{i}$.

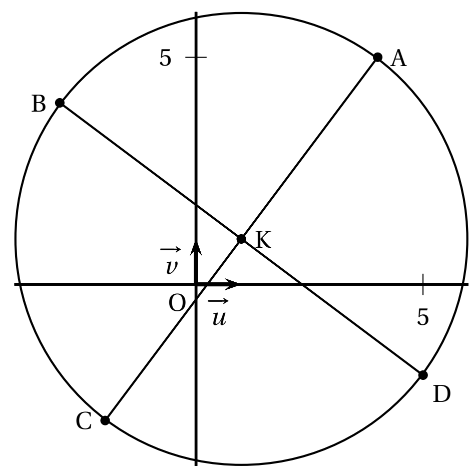
2. **a.** Cf. figure à la fin de l'exercice.

   b. On a $\dfrac{a+c}{2}=\dfrac{4+5\text{i}-2-3\text{i}}{2}=\dfrac{2+2\text{i}}{2}=1+\text{i}=k$. Donc K est le milieu de [AC].

   c. $|a-k|=|4+5\text{i}-(1+\text{i})|=|3+4\text{i}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

   $|b-k|=|-3+4\text{i}-(1+\text{i})|=|-4+3\text{i}|=\sqrt{-4)^2+3^2}=5$.

   Donc $|a-k|=|b-k| \iff$ KA = KB. Or d'après la question précédente KA = KC et finalement KA = KB = KC ce qui signifie que A, B et C appartiennent au cercle de centre K et de rayon 5, [AC] étant un diamètre.



3. **a.** On a $k=\dfrac{b+d}{2} \iff 2k=b+d \iff d=2k-b=2+2\text{i}-(-3+4\text{i})=5-2\text{i}$.

   b. - K est le milieu des diagonales [AC] et [BD[, donc ABCD est un parallélogramme ;

   - BD = 2 KB = 2 × 5 = 10 et AC = 10 ; les diagonales ont la même longueur, donc ABCD est un rectangle.

   - $|b-a|=|-3+4\text{i}-(4+5\text{i})|=|-7-\text{i}|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}=$ AB ; de même $|c-b|=|-2-3\text{i}-(-3+4\text{i})|=|1-7\text{i}|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}=$ BC.

   Conclusion : le rectangle ABCD ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un carré.

EXERCICE 2 **4 points**

1. On sait que la solution générale est de la forme :

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x,\ A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}.$$

2.

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 1 \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ A \times \left(-\frac{1}{2}\right) + B\frac{\sqrt{3}}{2} & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ B\frac{\sqrt{3}}{2} & = & -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ B & = & -\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Donc $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x$.

3. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) = 2\left(\cos 2x \cos\frac{\pi}{3} - \sin 2x \sin\frac{\pi}{3}\right) =$ $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ (formule d'addition).

4. La valeur moyenne de f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$ est :

$$m = \frac{1}{\frac{\pi}{3} - 0}\int_{0,}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{\pi} \times \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi}\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Étude des limites et recherche d'une asymptote

1. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc comme $\mathrm{e}^{-2x} = \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty}(6x+1) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. En factorisant e^{-x} dans l'écriture de $f(x)$, on a
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{-x} + 4 + 6x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x}\right)$.
Or $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, on conclut que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3. $h(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 4\mathrm{e}^{-x} + 6x + 1 - (6x+1) = \mathrm{e}^{-2x} + 4\mathrm{e}^{-x}$, donc comme on l'a vu au-dessus, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.
Géométriquement cela signifie que la droite d'équation $y = 6x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

4. On sait que quel que soit $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{u} > 0$, donc $h(x) > 0$.
Cela signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{D}$ quel que soit le réel x

Partie B : Étude des variations de la fonction *f*

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et quel que soit $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} - 4\mathrm{e}^{-x} + 6 = -2\left(\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x} - 3\right)$.
Posons $X = \mathrm{e}^{-x}$, donc $\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x} - 3 = X^2 + 2X - 3 = (X+1)^2 - 1 - 3 =$
$(X+1)^2 - 4 = (X+1+2)(X+1-2) = (X+3)((X-1)$.
Donc $f'(x) = -2\left(\mathrm{e}^{-x} + 3\right)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)$.

2. $e^{-x}-1 \geqslant 0 \iff e^{-x} \geqslant 1 \iff e^{-x} \geqslant e^{0} \iff -x \geqslant 0$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\iff x \leqslant 0$.
   Comme $e^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, $e^{-x}+3 > 3 > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc l'opposé de celui de $e^{-x}-1$ soit :
   - si $x \leqslant 0$, $f'(x) \leqslant 0$;
   - si $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$.
3. On en déduit le tableau de variations de f, la positivité de $f'(x)$ entraînant la croissance de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

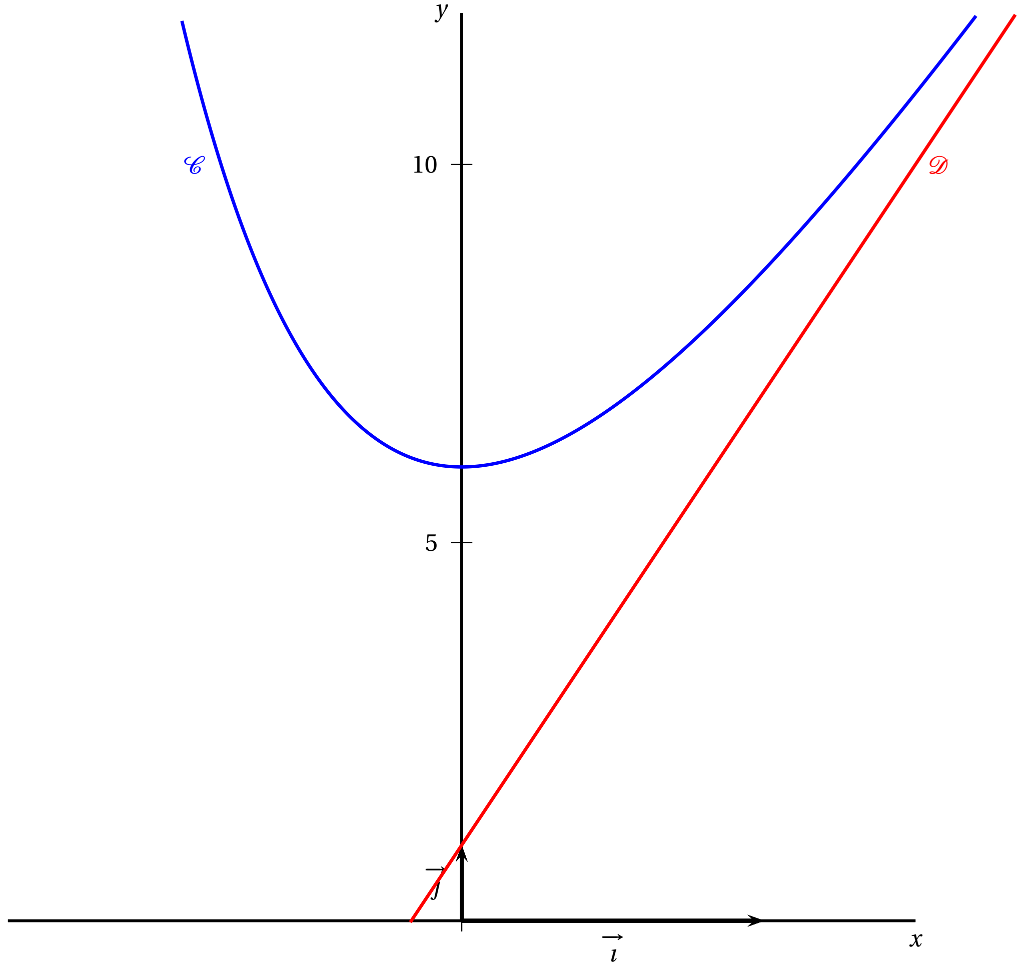
4. Voir la figure plus bas

Partie C : Calcul d'aire

1. On a vu à la question 4. de la partie A que la fonction h est positive donc sur $[0~;~m]$ avec $m > 0$; l'aire $\mathscr{A}(m)$ est égale à l'intégrale sur $[0~;~m]$ de la fonction h. D'où :
   $\mathscr{A}(m) = \displaystyle\int_0^m \left(e^{-2x}+4e^{-x}\right)\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}-4e^{-x}\right]_0^m = -\frac{1}{2}e^{-2m}-4e^{-m}+\frac{1}{2}+4 = \frac{9}{2}-\frac{1}{2}e^{-2m}-4e^{-m}$.
2. En particulier $\mathscr{A}(1) = \dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2}-4e^{-1} \approx 2,960 \approx 2,96$ au centième près
3. En posant $X = e^{-x}$, l'équation s'écrit $-4X^2-32X+17=0$.
   $\Delta = 32^2+4\times4\times17 = 1\,296 = 36^2$. L'équation a donc deux solutions réelles :
   $X_1 = \dfrac{32+36}{2\times(-4)} = -\dfrac{17}{2}$ et $X_2 = \dfrac{32-36}{2\times(-4)} = \dfrac{1}{2}$. Il reste donc à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{ccc} e^{-x} & = & -\dfrac{17}{2} \\ & \text{ou} & \\ e^{-x} & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} & & \text{pas de solution} \\ & \text{ou} & \\ -x & = & \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} & & \text{pas de solution} \\ & \text{ou} & \\ x & = & -\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln 2 \end{array}\right.$$

4. $\mathscr{A}(m) = \dfrac{19}{8} \iff \dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2m}-4e^{-m} = \dfrac{19}{8} \iff \dfrac{17}{8}-\dfrac{1}{2}e^{-2m}-4e^{-m} = 0 \iff 17-4e^{-2m}-32e^{-m} = 0$.
   On vient de voir que cette équation a une solution :
   $m = \ln 2 > 0$. On a $\mathscr{A}(\ln 2) = \dfrac{19}{8}$.


y
$\mathscr{C}$
10
$\mathscr{D}$
5
$\vec{\jmath}$
$\vec{\imath}$
x