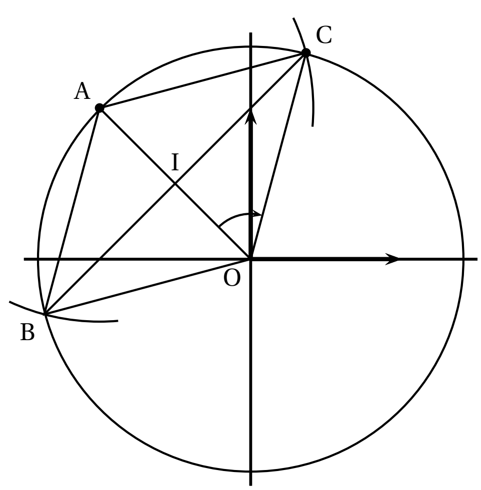
Corrigé du baccalauréat STI Polynésie juin 2008
Génie électronique

EXERCICE 1 **6 points**

1. $z^2+2z+2=0 \iff (z+1)^2-1+2=0 \iff (z+1)^2+1=0 \iff (z+1)^2-\mathrm{i}^2=0 \iff (z+1+\mathrm{i})(z+1-\mathrm{i})=0$.
   D'où les deux solutions : $-1-\mathrm{i}$ et $-1+\mathrm{i}$.
2. **a.** $|z_A|^2=1+1=2 \Rightarrow |z_A|=\sqrt{2}$.
   $|z_C|^2=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2 \Rightarrow |z_C|=\sqrt{2}$
   b. $z_A=\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.
   Un argument de z_A est donc $\dfrac{3\pi}{4}$.
3. **a.** $Z=\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\dfrac{\left[\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{i}\right](-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=$
   $\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)}{1+1}=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
   b. $|Z|^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1 \Rightarrow |Z|=1$.
   $Z=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\cos\frac{-\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{3}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   c. On a vu que $|z_A|=\sqrt{2}=|z_C|$ soit OA = OC.
   D'autre part on sait que $\arg Z=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$.
   Ceci montre que C est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
4.



Le triangle OAB est isocèle et a un angle au sommet de 60 ° : il est donc équilatéral. D'où la construction :

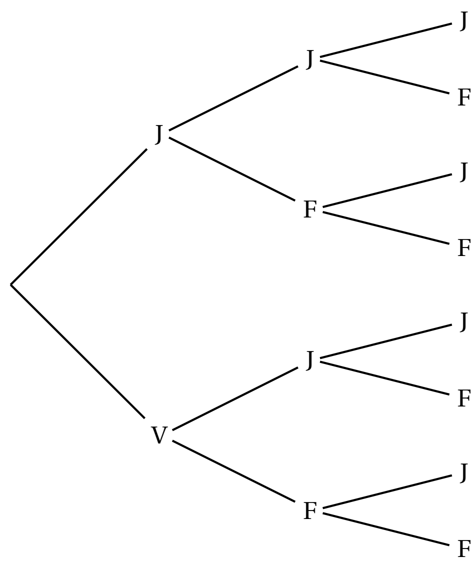
C est le point du premier quadrant intersection du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ et du cercle de centre A de même rayon.

5. On a par définition : $\overrightarrow{\text{OB}} = \overrightarrow{\text{CA}} \iff$ OBAC est un parallélogramme. Le milieu de I de [OA] est le milieu de [CB]. Il suffit donc de construire le deuxième point d'intersection de la question précédente pour construire la médiatrice de [OA]. I obtenu le symétrique de C autour de I est B.

   Comme OBAC est un parallélogramme et qu'il a deux côtés consécutifs de même longueur (CA = CO), c'est un losange

EXERCICE 2 **4 points**

I



Il y a donc 8 triplets différents.

II

1. Donc $p(J=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$.
2. On a $p(J \geqslant 1) = 1 - p(J=0) = 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.
3. **a.** X prend les valeurs naturelles de 0 à 3, avec les probabilités suivantes :

X	3	2	1	0
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

   b. Cf. au dessus

   c. $\text{E}(X) = 3\times\frac{1}{8} + 2\times\frac{3}{8} + 1\times\frac{3}{8} + 0\times\frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1,50$ €.

4. Loi de probabilité de Y :

X	3	2	1	0
Y	3	1,75	0,5	0
$p(Y=y_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\mathrm{E}(Y) = 3 \times \dfrac{1}{8} + 1,75 \times \dfrac{3}{8} + 0,5 \times \dfrac{3}{8} + 0 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{9,75}{8} = 1{,}218\,75.$

PROBLÈME **10 points**

PARTIE A - Étude de la représentation graphique d'une fonction f

1. On lit : $f(\ln 2) = 2 \quad f(0) = 3$
2. Tangente horizontale au point d'abscisse $\ln 2$ signifie que $f'(\ln 2) = 0$.
   Le coefficient directeur de la tangente est $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
3. On lit $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 6$.

PARTIE B - Étude de la fonction f

1. $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 6 = \left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)^2 - 4 + 6 = \left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)^2 + 2$.
2. En utilisant l'écriture précédente :
   $f(\ln 2) = \left(\mathrm{e}^{\ln 2} - 2\right)^2 + 2 = (2-2)^2 + 2 = 0 + 2 = 2$.
3. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)^2 = 4$ et enfin $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 6$.
   b. On vient donc de démontrer que la droite horizontale d'équation $y = 6$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de moins l'infini
4. On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)^2 = +\infty$ et enfin $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
5. **a.** f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et
   $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} = 2\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)$.
   b. $f'(x) = 0 \iff 2\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 2\right) = 0 \iff \begin{cases} 2\mathrm{e}^{x} & = & 0 \\ \mathrm{e}^{x} - 2 & = & 0 \end{cases} \iff \mathrm{e}^{x} - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^{x} = 2 \iff x = \ln 2$ par croissance de la fonction ln.
   La dérivée ne s'annule qu'au point d'abscisse $\ln 2$.
   c. De même $f'(x) > 0 \iff 2\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 2\right) > 0 \iff \mathrm{e}^{x} - 2 > 0$ (car $\mathrm{e}^{x} > 0$) $\iff \mathrm{e}^{x} > 2 \iff x > \ln 2$ par croissance de la fonction ln.
   On a donc $f'(x) > 0$ sur $]\ln 2\,;\,+\infty[$.
6. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6 ↘	3 ↘	2	↗ 7	↗ $+\infty$

7. D'après la tableau de variations précédent, la fonction f est croissante sur $[\ln 2\,;\,+\infty[$ de 2 à $+\infty$: il existe donc un unique réel $\alpha \in [\ln 2\,;\,+\infty[$ tel que $f(x) = 7$.
   On a $f(1,4) \approx 6,2$ et $f(1,5) \approx 8,1$, d'où $1,4 < \alpha < 1,5$.

PARTIE C Calcul d'une aire

1. F somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 6 = \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 6 = f(x)$.
   F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Cf. la figure plus bas.
3. L'unité d'aire est égale à $1,5 \times 1 = 1,5$ cm^2.
   Donc $\mathscr{A} = 1,5\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1,5\,[F(x)]_0^1 = 1,5\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e}^1 + 6\times 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^0 + 4\mathrm{e}^0 + 6\times 0\right) = 1,5\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - 4\mathrm{e} + \frac{19}{2}\right) \approx$ $3,482\,1$ cm^2 soit environ $3,48$ cm^2 au centième près.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE