Corrigé du baccalauréat STI Arts appliqués Métropole septembre 2006

EXERCICE 1 **8 points**

1. $9x^2+25y^2=225 \iff \dfrac{9x^2}{225}+\dfrac{25y^2}{225}=1 \iff \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1.$
   On reconnaît l'équation d'une ellipse.
2. $y=0 \Rightarrow x^2=25$. Donc $A(5;0)$ et $A'(-5\ ;\ 0)$;
   $x=0 \rightarrow y^2=9$. Donc $B(0;3)$ et $B'(0\ ;\ -3)$.
3. On a $c^2=a^2-b^2=25-9=16=4^2$.
   Donc $F(4;0)$ et $F'(-4\ ;\ 0)$
4. **a.** Voir à la fin de l'exercice.

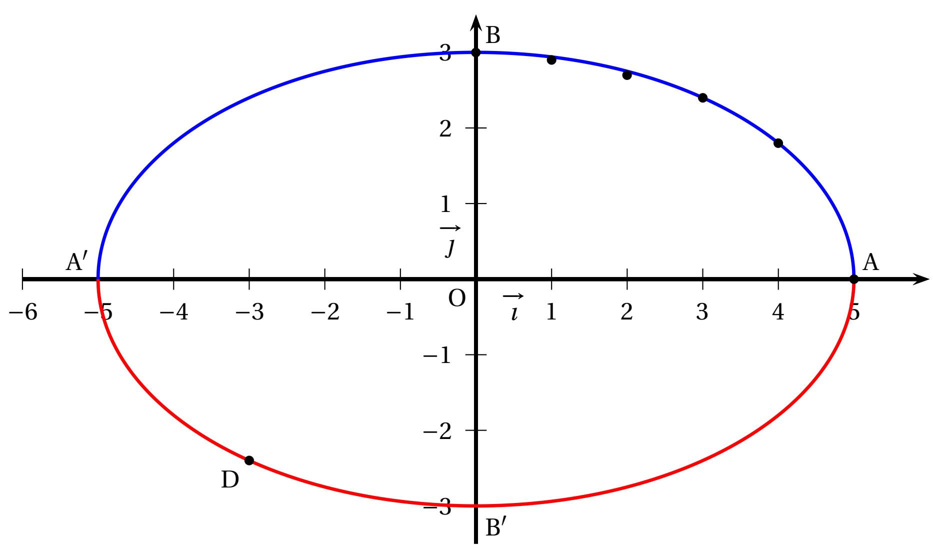
   b. On a $9x^2+25y^2=225 \iff 25y^2=225-9x^2 \iff y^2=\dfrac{225}{25}-\dfrac{9}{25}x^2 \iff y^2=9-\dfrac{9}{25}x^2 \iff$

   $$y^2=9\left(1-\frac{x^2}{25}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& 3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}} \quad \text{ou} \\ y &=& -3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}} \end{array}\right.$$

   c.

x	0	1	2	3	4	5
y	3	2,9	2,7	2,4	1,8	0

   d. Voir à la fin.
5. FD$=\sqrt{(-7)^2+2,4^2}=\sqrt{54,76}=7,4$;
   $F'D^2=\sqrt{1^2+2,4^2}=\sqrt{6,76}=2,6$;
   FD $+$F$'$D $=7,4+2,6=10$. En considérant le point A on a FA + F$'$A = 1 + 9 = 10 et A appartient à l'ellipse : donc D est lui aussi un point de l'ellipse.



EXERCICE 2 **12 points**

1. On a $2 - \dfrac{3}{(x+1)^2} = \dfrac{2(x+1)^2-3}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2+4x-3}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2} = f(x)$.

2. Comme $\displaystyle\lim_{x\to-1}(x+1)^2 = 0$ et que $(x+1)^2 > 0$, il en résulte que $\displaystyle\lim_{x\to-1} -\dfrac{3}{(x+1)^2} = -\infty$, donc enfin que $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$.

Géométriquement cecic montre que la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

3. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\dfrac{3}{(x+1)^2} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Géométriquement ceci montre que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

4. f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ et

$f(x) = 2 - \dfrac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = +2(x+1)\dfrac{3}{(x+1)^4} = \dfrac{6}{(x+1)^3}$.

Sur $]-1\,;\,+\infty[$, $x+1 > 0$, donc $(x+1)^3 > 0$ et par suite $f'(x) > 0$. La fonction f est donc croissante sur son intervalle de définition.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 2

5. $M(x\,;\,y) \in \mathrm{T} \iff y - f(1) = f'(1)(x-1)$;

$f(1) = \dfrac{5}{4}$; $f'(1) = \dfrac{6}{(1+1)^3} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$.

Donc $M(x\,;\,y) \in \mathrm{T} \iff y - \dfrac{5}{4} = \dfrac{3}{4}(x-1) \iff y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

6. Avec l'axe des ordonnées : $x = 0$, d'où $f(0) = -1$;

Avec l'axe des abscissess : $y = 0$, d'où $\dfrac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2} = 0 \iff 2x^2+4x-1 = 0$;

Pour cette équation du second degré : $\Delta = 4+8 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$; l'équation a deux racines réelles :

$\dfrac{-4+2\sqrt{3}}{4} = -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ et $\quad -1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Seule la première racine est supérieure à -1.

7. a.

x	$-0,5$	0	1	2	3	5
$f(x)$	-10	-1	$1,3$	$1,7$	$1,8$	$1,9$

b. Voir la figure à la fin.

8. a. Sur $]-1\,;\,+\infty[$, F est dérivable et

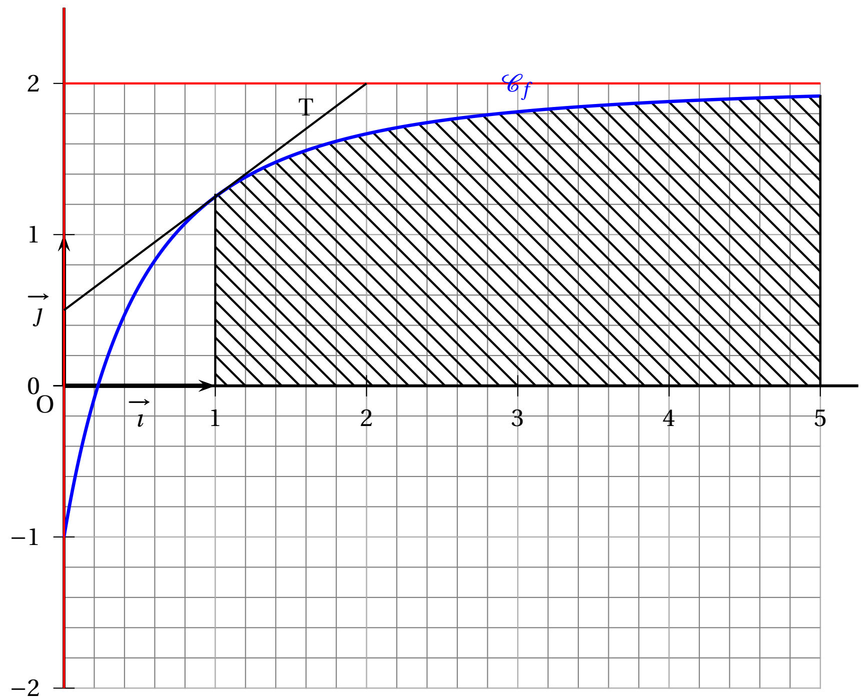
$F'(x) = 2 - \dfrac{3}{(x+1)^2} = f(x)$.

F est donc une primitive de f sur $]-1\,;\,+\infty[$.

b. La fonction est croissante sur $[1\ ;\ 5]$ et $f(1) \approx 1,3$, donc sur cet intervalle la fonction f est positive non nulle, donc l'aire de la partie $\mathscr{A}$ est égale (en unité d'aire) à l'intégrale :

$\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^5 = F(5) - F(1) = 2\times 5 + \dfrac{3}{5+1} - \left(2\times 1 + \dfrac{3}{1+1}\right) = 10 + \dfrac{1}{2} - 2 - \dfrac{3}{2} = 8 - 1 = 7$ (u. a.)

Comme l'unité d'aire est égale à $2 \times 2 = 4$ (cm)^2, l'aire en centimètres carrés est égale à $4 \times 7 = 28$ cm^2.



2
1
0
−1
−2
O
1
2
3
4
5
T
$\mathscr{C}_f$
$\vec{\imath}$
$\vec{\jmath}$