Corrigé du baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole
19 juin 2009

EXERCICE **8 points**

1. **a.** Faux : $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x+1} = +\infty$.
   b. Faux : voir au dessus ;
   c. Vrai.

2. **a.** Faux : $\mathrm{e}^{-\ln(2)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(2)}} = \dfrac{1}{2}$.
   b. Faux : voir au dessus.
   c. Vrai.

3. **a.** Faux : 1 n'appartient pas à l'ensemble de définition.
   b. Vrai : $\ln(x-1) = 1 \iff \ln(x-1) = \ln \mathrm{e} \iff x - 1 = \mathrm{e}$ (par croissance de la fonction ln, donc $x = 1 + \mathrm{e} > 1$.
   c. Faux.

4. **a.** Faux : $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \iff \dfrac{4x^2}{36} + \dfrac{9y^2}{36} - 1 = 0 \iff \left(\dfrac{2x}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{3x}{6}\right)^2 - 1 = 0 \iff$
   $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0$: ceci est l'équation d'une ellipse telle que $a = 3$ et $b = 2$.
   L'abscisse d'un foyer c est telle que $a^2 = b^2 + c^2 \iff c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \iff$
   $c = \sqrt{5} \quad \text{ou} \quad c = -\sqrt{5}$.
   Il y a donc deux foyers de coordonnées $\left(-\sqrt{5}\ ;\ 0\right)$ et $\left(\sqrt{5}\ ;\ 0\right)$.
   b. Vrai : voir ci-dessus.
   c. Faux.

5. **a.** Faux : On sait que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \iff p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,25 + 0,6 - 0,7 = 0,15$.
   b. Faux.
   c. Vrai.

6. **a.** Faux : on a $\mathrm{EF}^2 = \left(3\sqrt{5} - 0\right)^2 + (1 - (-1))^2 = 45 + 4 = 49 \Rightarrow \mathrm{EF} = 7$.
   b. Vrai.
   c. Faux.

7. **a.** Faux : la dérivée de $\mathrm{e}^{2x} + x$ est $2\mathrm{e}^{2x} + 1$.
   b. Faux : la dérivée de $2\mathrm{e}^{2x}$ est $4\mathrm{e}^{2x}$.
   c. Vrai : la dérivée de $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + x - 3$ est $2 \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 1 = \mathrm{e}^{2x} + 1$.

8. **a.** Faux : les points $M(x\ ;\ y)$ communs sont tels que $\left\{\begin{array}{lcl} 5x^2 - y^2 - 25 & = & 0 \\ y & = & x \end{array}\right. \iff$

   $$\left\{\begin{array}{lcl} 5x^2 - x^2 - 25 & = & 0 \\ y & = & x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 4x^2 - 25 & = & 0 \\ y & = & x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x^2 & = & \dfrac{25}{4} \\ y & = & x \end{array}\right.$$

   Il y a donc deux points communs de coordonnées $\left(-\dfrac{5}{2}\ ;\ -\dfrac{5}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{5}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$.

b. Vrai.

c. Faux.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

1. La fonction f est décroissante sur $[0\,;\;3]$.

2. $K = \displaystyle\int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x + 3\right)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3} \times \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right]_0^3 =$
$-\dfrac{3^4}{12} + \dfrac{4}{9} \times 3^3 - 3^2 + 3 \times 3 - (0) = -\dfrac{27}{4} + 12 = \dfrac{21}{4}$.

Partie B

1. $g'(x) = -\mathrm{e}^x + (3-x)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2-x)$.

2. On sait que $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x ; le signe de $g'(x)$ est donc celui de $2-x$.
Si $x < 2$, alors $g'(x) > 0$;
Si $x > 2$, alors $g'(x) < 0$.

a.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$g(x)$	3	4,1	5,4	6,7	7,4	6,1	0

b. Voir plus bas.

3. a. G est dérivable et $G'(x) = -\mathrm{e}^x + (4-x)\mathrm{e}^x = (3-x)\mathrm{e}^x = g(x)$.

b. $J = \displaystyle\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = [G(x)]_0^3 = [(4-x)\mathrm{e}^x]_{0^3} = 1\mathrm{e}^3 - 4 = \mathrm{e}^3 - 4$.

Partie C

1.

2.

3.

4. D'après les résultats de la question A. 2. et de la question B. 4. b. :
$\mathscr{A}(P_1) = J - K = \mathrm{e}^3 - 4 - \dfrac{21}{4}$.
Par symétrie P_1 et P_2 ont la même aire, donc :
$\mathscr{A}(P_1 + P_2) = 2\left(\mathrm{e}^3 - 4 - \dfrac{21}{4}\right) = 2\mathrm{e}^3 - 8 - \dfrac{21}{2} = 2\mathrm{e}^3 - \dfrac{37}{2}$ (u. a.)
L'unité d'aire valant $4 \times 1 = 4\ \text{cm}^2$, on a :
$\mathscr{A}(P_1 + P_2) = 8\mathrm{e}^3 - 74\ (\text{cm}^2)$.
La calculatrice donne $\mathscr{A}(P_1 + P_2) \approx 86,68 \approx 87\ (\text{cm}^2)$.

ANNEXE à rendre avec la copie