Corrigé du baccalauréat STI Arts appliqués Métropole septembre 2010

EXERCICE **8 points**

1. **a.** $f(x)=0 \iff -2x^2+5x-3=0$. $\Delta = 25-24=1$, donc deux solutions réelles : $\dfrac{-5+1}{2\times(-2)}=1$ et $\dfrac{-5-1}{2\times(-2)}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}=1,5$: vrai : si $f(x)=0$, alors $x=1,5$ (mais on peut aussi avoir $x=1$) ;

   b. $f(x) = -2\left(x^2-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}\right) = -2\left[\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2-\dfrac{25}{16}+\dfrac{3}{2}\right] = -2\left[\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2-\dfrac{1}{16}\right]$. Le sommet de P correspond au maximum de f qui est atteint quand le carré s'annule soit si $x=\dfrac{5}{4}$; l'ordonnée du sommet S est $f\left(\dfrac{5}{4}\right)=-2\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{8}$. Donc $\mathrm{S}\left(\dfrac{5}{4}\ ;\ \dfrac{1}{8}\right)$: faux ;

   c. Si $f(x)=(x-1)(2x-3)$, alors $f(x)=2x^2+\cdots$: faux ;

   d. $f(-1)=-2\times(-1)^2+5\times(-1)-3=-2-5-3=-10$: faux

2. On a $f'(x)=\dfrac{2(3x+1)-3(2x-3)}{(3x+1)^2}=\dfrac{6x+2-6x+9}{(3x+1)^2}=\dfrac{11}{(3x+1)^2}$: réponse **b.**

3. En posant $X=\mathrm{e}^x$, l'équation s'écrit : $X^2-X-2=0$. Comme $\Delta=1-8=9=3^2$, on a soir $X=\mathrm{e}^x=\dfrac{1+3}{2}=2$ soit $X=\dfrac{1-3}{2}=-1=\mathrm{e}^x$. Cette dernière équation n'a pas de solution et la première donne $x=\ln 2$. Réponse **d.**

4. $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{-1+x}}=\mathrm{e}^{x+1+1-x}=\mathrm{e}^2$. Réponse **c.**

5. Réponse **b.**

6. **a.** Le point de coordonnées $(0;4)$ n'appartient pas à l'ellipse : il ne peut être un sommet ;

   b. $x^2+2y^2=16 \iff \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$. On a donc $a^2=16$ et $b^2=8$, donc $c^2=16-8=8 \iff c=2\sqrt{2}$. Donc $\mathrm{FF}'=4\sqrt{2}$.

   c. Les foyers ont pour coordonnées $(2\sqrt{2}\ ;\ 0)$ et $(-2\sqrt{2}\ ;\ 0)$.

   d. Le point M$(4;0)$ appartient à E ; pour ce point $\mathrm{MF}+\mathrm{MF}'=4-2\sqrt{2}+4+2\sqrt{2}=8$: vrai.

7. Il y a $40-(10+17+4)=40-31=9$ élèves qui n'écoutent ni rap ni techno, donc la probabilité est égale à $\dfrac{9}{40}$: réponse **b.**

8. En faisant un arbre on trouve que la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à : $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{25}$. Réponse **b.**

PROBLÈME **12 points**

Première partie

1. On lit : $f(1)=1$, $f(2)=\dfrac{3}{5}=0,6$ et $f(3)=\dfrac{4}{5}=0,8$.

2. **a.** $M(x\;;\;y) \in (\text{AB}') \iff y = ax + b$, donc en particulier :
   $\text{A}(1\;;\;1) \in (\text{AB}') \iff 1 = 1a + b \iff b = 1 - a$;
   $\text{B}' \in (\text{AB}') \iff 0 = 2a + b \iff b = -2a$.
   On en déduit que $1 - a = -2a \iff a = -1$, puis $b = 2$.
   $M(x\;;\;y) \in (\text{AB}') \iff y = -x + 2$.

   b. $f'(1)$ nombre dérivé en 1 est le coefficient directeur de la tangente en A, donc de la droite (AB$'$). D'où $f'(1) = -1$.
   De même $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente en B qui est horizontale, donc $f'(2) = 0$.

3.

x	1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0,6	$\nearrow$	0,8

4. Ce triangle a deux côtés de l'angle droit de mesure 1 ; donc l'aire du triangle AA$'$B$'$ en unités d'aires est égale $\dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.

Deuxième partie

1. On développe $\ln\left(\dfrac{\text{e}^3}{9}\right) = \ln\left(\text{e}^3\right) - \ln 9 = 3\ln \text{e} - \ln 3^2 = 3 - 2\ln 3 = f(3)$.

2. **a.** Quel que soit $x \in [1\;;\;3]$, $F'(x) = \dfrac{2x}{2} + 2 - 2\ln x - 2x \times \dfrac{1}{x} = x + 2 - 2\ln x - 2 = x - 2\ln x = f(x)$.
   Cette égalité montre que F est une primitive de f sur $[1\,;\,3]$.

   b. $\text{I} = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_1^3 = F(3) - F(1) = \dfrac{3^2}{2} + 2 \times 3 - 2 \times 3\ln 3 - \left(\dfrac{1^2}{2} + 2 \times 1 - 2 \times 1 \ln 1\right) =$
   $\dfrac{9}{2} + 6 - 6\ln 3 - \dfrac{1}{2} - 2 = 8 - 6\ln 3$.

3. **a.** Voir la figure à la fin.

   b. L'aire du logo est en unité d'aire égale à la différence entre l'intégrale de la fonction f entre 1 et 3 et l'aire du triangle AA$'$B$'$ soit :
   $\mathcal{A}(\text{logo}) = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\text{d}x - \mathcal{A}(\text{AA}'\text{B}') = 8 - 6\ln 3 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{15}{2} - 6\ln 3$ (u. a.)
   1 u. a. $= 10 \times 10 = 100$ cm^2, donc :
   $\mathcal{A}(\text{logo}) = 100\left(\dfrac{15}{2} - 6\ln 3\right) = 750 - 600\ln 3$ cm^2 soit environ 91 cm^2.

Annexe au problème