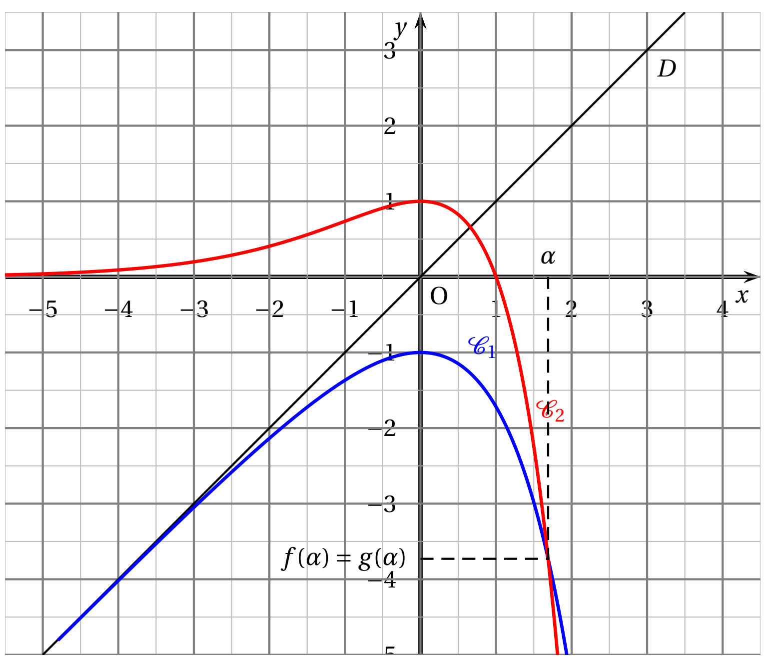
∾ Corrigé du baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole ∾ septembre 2009

EXERCICE **8 points**

1. Faux : la formule est $p(C \cup R) = p(C) + p(R) - p(C \cap R) = \dfrac{8}{32} + \dfrac{4}{32} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$.
2. $x^2 + 4y^2 = 16 \iff \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1$. C'est bien l'équation d'une ellipse d'équation générale $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$, avec $a = 4$ et $b = 2$. On sait que $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$ et que les foyers ont pour coordonnées $(c\,;\,0)$ et $(-c\,;\,0)$ soit $(2\sqrt{3}\,;\,0)$ et $(-2\sqrt{3}\,;\,0)$. La proposition est vraie.
3. On a $F'(x) = -1 + \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = -1 + \ln x + 1 = \ln x$. La proposition est vraie.
4. On a $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$; la fonction f est donc décroissante sur $[0\,;\,1]$ et croissante sur $[1\,;\,2]$. Elle a un extremum (minimum) en $x = 1$ égal à $f(1) = 1 - 2 + 2 = 1 > 0$.
   Conclusion : le minimum étant supérieur à zéro, la fonction est supérieure à zéro sur $[0\,;\,2]$. On alors que l'aire en unité d'aire, donc ici en cm^2 de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$ est égale à :
   $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2 - 2x + 2\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - 2^2 + 2 \times 2 - (0) = \frac{8}{3} - 4 + 4 = \frac{8}{3}$. La proposition est vraie.

PROBLÈME **12 points**

Partie A



1. On a $f(0) = -1$ et $g(0) = 1$, donc $\mathscr{C}_1$ est la représentation graphique de f et $\mathscr{C}_2$ est la représentation graphique de g.
2. On a $f(x) - x = -\mathrm{e}^x$ et on sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = 0$. Ceci signifie que la droite oblique D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_1$ au voisinage de moins l'infini.

Partie B : Étude de la fonction g.

1. Soit $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$. On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et également que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.
   On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et par produit de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x)\mathrm{e}^x = -\infty$.
2. $g'(x) = -\mathrm{e}^x + (1 - x)\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$, produit qui est du signe de $-x$, puisque $\mathrm{e}^x > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
   Donc $x < 0 \Rightarrow g'(x) > 0$: la fonction g est croissante ;
   $x > 0 \Rightarrow g'(x) < 0$: la fonction g est décroissante.
   D'où le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

3. La dérivée de g ne s'annule qu'une fois en changeant de signe ; g n'a donc qu'un extremum $g(0) = 1$.

Partie C : Intersection des courbes représentatives de f et g

1. Calculons $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 1 - \mathrm{e}^x - (-x\mathrm{e}^x) = 1 - \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = 1 - [\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x] = 1 - \mathrm{e}^x(1 - x) = 1 - g(x)$.
2. On a vu que sur $\mathbb{R}$, $g(x) \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant -g(x) \iff 0 \leqslant 1 - g(x) = h'(x)$.
   Donc sur $\mathbb{R}$, $h'(x) \geqslant 0$, donc h est croissante.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3. La fonction h est dérivable sur $]1~;~2[$ et $h(1) = 1 - \mathrm{e} \approx -1,718 < 0$ et $h(2) = 2 - \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 = 2 > 0$: il existe donc un réel unique $\alpha \in]1~;~2[$ tel $h(\alpha) = 0$.
   La calculatrice donne $h(1,6) \approx -0,4$ et $h(1,7) \approx 0,6$, donc $1,6 < \alpha < 1,7$.
4. On a : il existe un unique réel α de $]0~,~1[$ tel que $h(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) - g(\alpha) = 0 \iff$ $f(\alpha) = g(\alpha)$, ce qui signifie que les deux courbes représentatives de f et de g ont un unique point commun d'abscisse α, avec $1,6 < \alpha < 1,7$.