Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie mécanique, civil juin 2010 Antilles–Guyane

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** $z^2 = -1$; $= \{-\text{i} ; \text{i}\}$.

   b. $z^2 - 4z + 13 = 0$; $\Delta = 16 - 4 \times 13 = 16 - 52 = -36 = (6\text{i})^2$. L'équation a donc deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{4+6\text{i}}{2} = 2 + 3\text{i}$ et son conjugué $2 - 3\text{i}$.

   c. $z - 3\text{i} = -2\text{i}z + 4 \iff z(1+2\text{i}) = 3\text{i} \iff x = \dfrac{3\text{i}}{1+2\text{i}} = \dfrac{3\text{i}(1-2\text{i})}{(1+2\text{i})(1-2\text{i})} = \dfrac{6+3\text{i}}{1+4} = \dfrac{6}{5} + \text{i}\dfrac{3}{5}$.

2. **a.** Voir la figure.

   b. On a $|\text{AB}| = |z_\text{B} - z_\text{A}| = |2+3\text{i}-\text{i}| = |2+2\text{i}| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

   c. $z_\text{C} = \dfrac{4+3\text{i}}{1+2\text{i}} = \dfrac{(4+3\text{i})(1-2\text{i})}{(1+2\text{i})(1-2\text{i})} = \dfrac{4+6+3\text{i}-8\text{i}}{1+4} = \dfrac{10-5\text{i}}{5} = 2 - \text{i}$.

3. **a.** $z_\text{C} - z_\text{A} = 2 - \text{i} - \text{i} = 2 - 2\text{i}$

   Ce complexe a pour module : $\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$.

   On peut donc factoriser ce module :

   $z_\text{C} - z_\text{A} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

   Donc un argument de ce complexe est $-\dfrac{\pi}{4}$.

   b. On a donc $z_\text{C} - z_\text{A} = 2\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

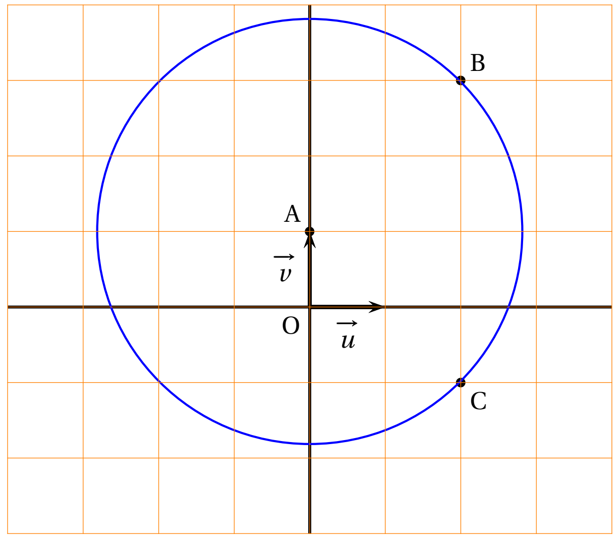
   c. Cette égalité $|z - z_\text{A}| = 2\sqrt{2}$ est équivalente à $\text{A}M = \text{AC} = 2\sqrt{2}$.

   Les points M appartiennent au cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{2}$ (comme le point C).

   d. On a vu que $\text{AB} = |z_\text{B} - z_\text{A}| = 2\sqrt{2}$: le point B appartient à E.

   On a vu que $|z_\text{C} - z_\text{A}| = \text{AC} = 2\sqrt{2}$, donc C appartient à l'ensemble E.

   Le cercle E est le cercle centré en A et contenant B et C. Voir la figure



EXERCICE 2 **5 points**

1. Pour chaque option il est possible de la choisir ou non donc deux choix possibles. Il y a donc en tout : $2 \times 2 \times 2 = 8$ nombre de combinaisons.

2. **a.** Chaque choix a donc une probabilité de $\frac{1}{8}$, en particulier celle de ne choisir aucune option. La probabilité qu'un client équipe son véhicule en choisissant au moins une option est donc égale à $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

   b. Il y a 4 choix sur les 8 qui ne contiennent pas l'option B. Donc 4 contenant au moins l'option B. Soit une probabilité de $4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

3. **a.**

k	0	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000
$p(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

   b. La probabilité cherchée est égale à :
   $p(X = 2\,000) + p(X = 2\,500) + p(X = 3\,000) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

   c. $\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 500 \times \frac{1}{8} + 1\,000 \times \frac{1}{8} + 1\,500 \times \frac{2}{8} + 2\,000 \times \frac{1}{8} + 2\,500 \times \frac{1}{8} + 3\,000 \times \frac{1}{8} =$
   $\frac{500 + 1\,000 + 3\,000 + 2\,000 + 2\,500 + 3\,000}{8} = \frac{12\,000}{8} = 1\,500$ (€).

4. On reprend le calcul de l'espérance avec un prix de l'option à 1 000 €.
   $\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 500 \times \frac{1}{8} + 1\,000 \times \frac{2}{8} + 1\,500 \times \frac{2}{8} + 2\,000 \times \frac{1}{8} + 2\,500 \times \frac{1}{8} =$
   $\frac{500 + 2\,000 + 3\,000 + 2\,000 + 2\,500}{8} = \frac{10\,000}{8} = 1\,250$ (€).
   En moyenne le chiffre d'affaires des options baisse pour un véhicule de 250 €, soit en pourcentage de :

$$\frac{250}{1\,500} \times 100 = \frac{50}{3} \approx 16,67\,\%$$

PROBLÈME **10 points**

1. a. h somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$h'(x) = -\dfrac{1}{x} + 4x = \dfrac{4x^2-1}{x}$.

Comme $x >$, le signe de $h'(x)$ est celui du numérateur

$4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1)$.

Ce trinôme est du signe de 4, donc positif sauf entre les racines $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

Donc en résumé :

- sur $\left]0~;~\dfrac{1}{2}\right[$, $h'(x) < 0$;
- sur $\left]\dfrac{1}{2}~;~+\infty\right[$, $h'(x) > 0$

b. $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \ln\dfrac{1}{2} + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - (-\ln 2) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} + \ln 2$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$\frac{3}{2} + \ln 2$	$\nearrow$	

c. Le minimum de h est donc $\frac{3}{2} + \ln 2 > 0$ car somme de deux nombres positifs.

Conclusion : sur $]0~;~+\infty[$, $h(x) > 0$.

2. a. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0 x>0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0 x>0} x = 0$, donc

$\displaystyle\lim_{x\to 0 x>0} f(x) = -\infty$.

b. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c. f somme de de quotients de fonctions dérivables, le dénominateur étant non nul sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} + 2 = \dfrac{1 - \ln x + 2x^2}{x^2} = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

Or on a vu que sur $]0~;~+\infty[$, $h(x) > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur $]0~;~+\infty[$. D'où le tableau :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. Soit d la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $d(x) = f(x) - 2x = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} d(x) = 0$, ce qui signifie que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

b. Comme $x > 0$ et $\ln x > 0$, $\dfrac{\ln(x)}{x} > 0$. La fonction d est positive ce qui géométriquement signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de son asymptote pour tout réel positif non nul.

4. On a $M(x\ ;\ y) \in \mathscr{T} \iff y - f(1) = f'(1)(x-1) \iff y - (0+2) = \dfrac{1 - \ln 1 + 2 \times 1^2}{1^2}(x-1) \iff y - 2 = 3(x-1) \iff y = 3x - 1$.

5. Voir plus bas.

6. a. G est dérivable et sur $]0\ ;\ +\infty[$

$G'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \ln x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x}{x}$.

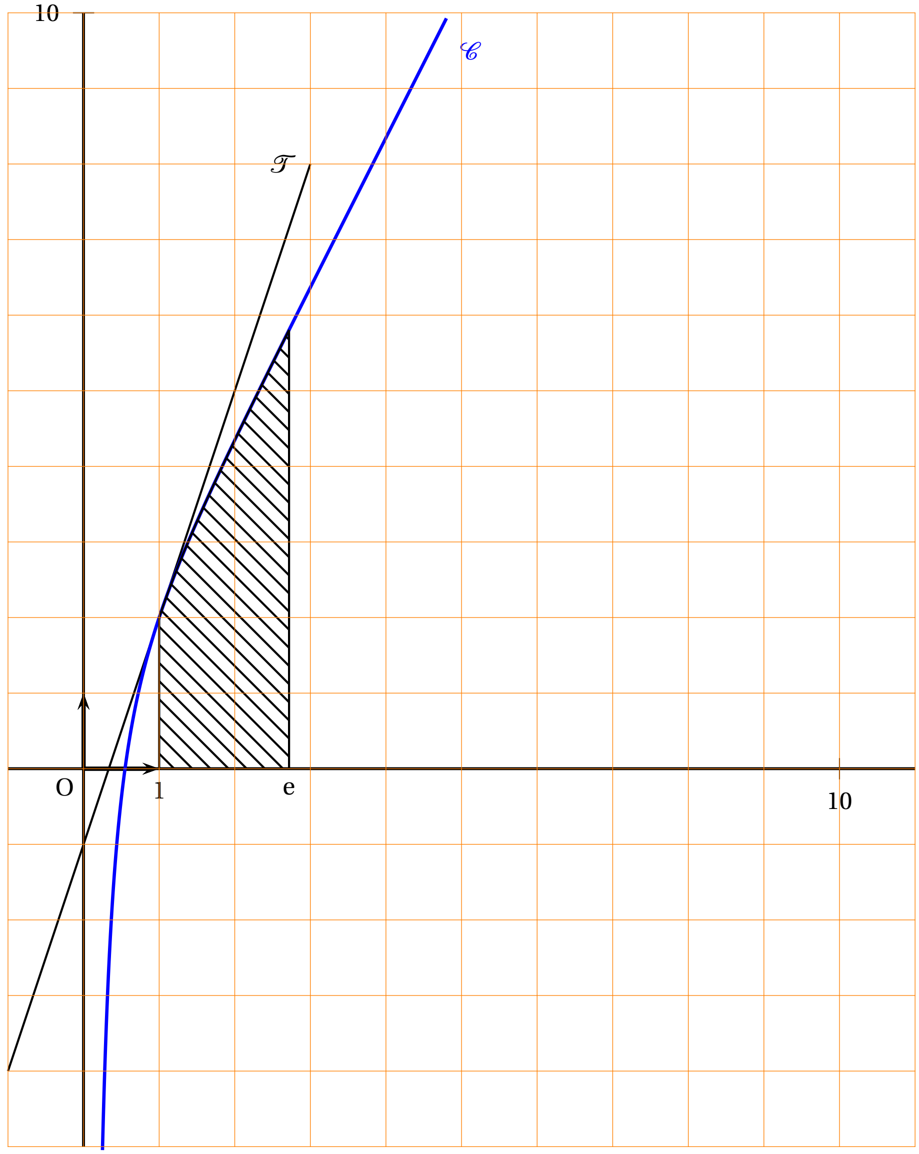
Donc G est une primitive sur $]0\ ;\ +\infty[$ de $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

b. Voir plus bas.

c. On sait que sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, la fonction f est positive, donc l'aire (en unité d'aire) de la surface hachurée est égale à l'intégrale :

$$\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (g(x) + 2x)\,\mathrm{d}x = \left[G(x) + x^2\right]_1^{\mathrm{e}} =$$

$$G(\mathrm{e}) + (\mathrm{e})^2 - G(1) - 2 = \frac{1}{2}(\ln \mathrm{e})^2 + (\mathrm{e})^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 - 2 = \frac{1}{2} + (\mathrm{e})^2 - 1 = \mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}.\ \text{(u. a)}$$


10
$\mathscr{C}$
$\mathscr{T}$
O
1
e
10