Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie
15 novembre 2012 Génie mécanique,énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

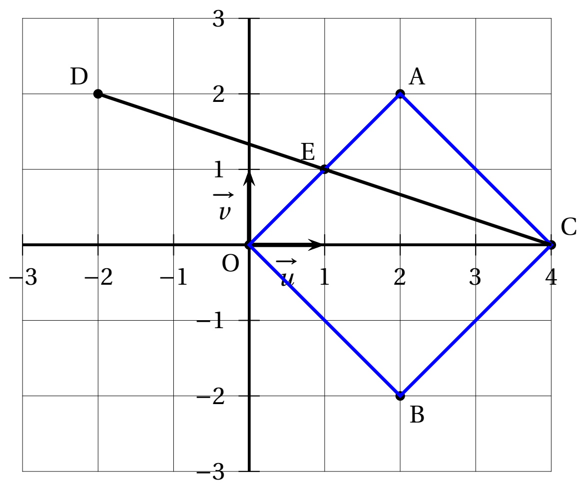
1.

$$z^2 - 4z + 8 = 0.$$

$\Delta = 16 - 32 = -16 = (4\text{i})^2$: l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{4+4\text{i}}{2} = 2 + 2\text{i}$ et $z_2 = 2 - 2\text{i}$.

2. a.

$$z_A = 2 + 2\text{i}, \quad z_B = 2 - 2\text{i}, \quad \text{et } z_C = 4.$$



b. • $|z_A|^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, donc $|z_A| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = \text{OA}$; • $|z_b|^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$, donc $|z_B| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = \text{OB}$

c. On a aussi $\text{AB}^2 = (2-2)^2 + (-2-2)^2 = 16$, d'où $\text{AB} = 4$.

- $\text{OA} = \text{OB} = 2\sqrt{2}$, donc OAB est isocèle en O.
- $\text{OA}^2 + \text{OB}^2 = 8 + 8 = 16 = \text{AB}^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en O.

d. $\overrightarrow{\text{OB}}\,(2\,;\,-2)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\,(4-2\,;\,0-2)$, donc $\overrightarrow{\text{OB}} = \overrightarrow{\text{AC}}$, ce qui montre que le quadrilatère OBCA est un parallélogramme.

Comme il a un angle droit, c'est un rectangle ; comme il a deux côtés consécutifs [OA° et [OB] de même longueur, c'est aussi un losange et finalement un carré.

3. On a donc E(1 ; 1).

$z_D = \text{i}z_A$ entraîne $z_D = \text{i}(2+2\text{i}) = -2 + 2\text{i}$, donc D(−2 ; 2).

Le milieu de [CD] a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{4+(-2)}{2}\,;\,\dfrac{0+2}{2}\right) = (1\,;\,1)$. On retrouve bien les coordonnées de E.

EXERCICE 2 **5 points**

Question 1

L'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ a deux solutions 2i et -2i ; on sait que la solution générale est de la forme $f(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$; réponse C.

Question 2

On a $f'(x) = 2\text{e}^{3x+1} + 3 \times (2x+1)\text{e}^{3x+1} = \text{e}^{3x+1}(2+3(2x+1)) = \text{e}^{3x+1}(6x+5)$; réponse B.

Question 3

On a $E(X) = -5 \times \dfrac{3}{25} - 2 \times \dfrac{2}{25} + 0 \times \dfrac{15}{25} + 1 \times \dfrac{2}{25} + 6 \times \dfrac{3}{25} = \dfrac{-15-4+2+18}{25} = \dfrac{1}{25} > 0$; réponse C. On considère que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable X est strictement positive, équitable si elle est nulle, et défavorable au joueur si elle est strictement négative.

Réponse A : le jeu est défavorable au joueur **Réponse B** : le jeu est équitable
Réponse C : le jeu est favorable au joueur **Réponse D** : on ne peut pas savoir

Question 4

On a $[g(x)]^2 = \left(x^2+1\right)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$.

Donc $V = \pi \displaystyle\int_0^1 \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) \text{d}x = \pi \left[\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{2x^3}{3} + x\right]_0^1 = \pi \left(\dfrac{1^5}{5} + \dfrac{2 \times 1^3}{3} + 1\right) = \pi \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{3} + 1\right) = \pi \times \dfrac{3+10+15}{15} = \dfrac{28\pi}{15}$; réponse D.

Question 5

Réponse A évidente.

Problème **10 points**

Partie A - Exploitation d'informations graphiques

1. A(0 ; 4) appartient à la courbe représentative, donc $g(0) = 4$.
   Le coefficient directeur de la tangente en A est le nombre dérivé $f'(0)$. Il est nul, donc $f'(0) = 0$.
2. $g(0) = 4 = b + \text{e}^{-0} = b + 1$, d'où $b = 3$.
3. On a $g'(x) = a - \text{e}^{-x}$.
   Or $g'(0) = 0$ signifie $a - 1 = 0$, d'où $a = 1$.
   On a donc $g(x) = x + 3 + \text{e}^{-x}$.

Partie B - Étude d'une fonction

1. **a.** On remarque que $f(x) = g(x)$.
   On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{e}^{-x} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x + 3 = +\infty$, donc par somme de limites, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b. On a $f(x) - (x+3) = \text{e}^{-x}$, donc d'après le résultat précédent $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x+3)) = 0$; ce résultat signifie que la droite $\mathscr{D}$ dont une équation est $y = x+3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.
   Comme $f(x) - (x+3) = \text{e}^{-x}$ et que cette dernière expression est supérieure à zéro quel que soit le réel x, ceci signifie que la courbe est au dessus de son asymptote $\mathscr{D}$ quel que soit x.
2. **a.** On a $f(x) = x + 3 + \text{e}^{-x} = x\text{e}^{-x} \times \text{e}^{x} + 3\text{e}^{-x} \times \text{e}^{x} + \text{e}^{-x}$ et en factorisant e^{-x} :
   $f(x) = \text{e}^{-x}\left[x\text{e}^{x} + 3\text{e}^{x} + 1\right] = \text{e}^{-x}\left(1 + x\text{e}^{x} + 3\text{e}^{x}\right)$.

   b. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \text{e}^{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\text{e}^{x} = \lim_{x \to -\infty} 3\text{e}^{x} = 0$ et par somme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 1 + x\text{e}^{x} + 3\text{e}^{x} = 1$.
   D'autre part $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$, d'où par produit de limites $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \text{e}^{-x}\left(1 + x\text{e}^{x} + 3\text{e}^{x}\right) = +\infty$.
3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a. On a $f'(x) = g'(x) = 1 - \text{e}^{-x}$.
   - On a $1 - \text{e}^{-x} > 0$ si $1 > \text{e}^{-x}$ soit en prenant le logarithme $0 > -x$ ou $x > 0$;
   - On a $1 - \text{e}^{-x} < 0$ si $1 < \text{e}^{-x}$ soit en prenant le logarithme $0 < -x$ ou $x < 0$;
   - On a $1 - \text{e}^{-x} = 0$ si $x = 0$.

b. La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$ de plus l'infini à $f(0) = 3+1 = 4$, puis croissante sur $\mathbb{R}^+$ de 4 à plus l'infini.

4. Voir à la fin.

5. L'asymptote $\mathscr{D}$ a pour coefficient directeur 1 ; il faut donc résoudre l'équation :
$f'(x) = 1$ soit $1 - \mathrm{e}^{-x} = 1$. Or on sait que e^{-x} n'est jamais nul quel que soit le réel x ; il n'y a donc pas de tangente à la courbe $\mathscr{C}$ parallèle à la droite $\mathscr{D}$.

Partie C - Calcul d'une aire plane

1. Une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est :
$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 3x - \mathrm{e}^{-x}$.

2. Voir à la fin.

3. On sait que sur $\mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 4 > 0$, donc l'aire $\mathscr{A}$ est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^3 = F(3) - F(1) = \dfrac{3^2}{2} + 3\times3 - \mathrm{e}^{-3} - \left(\dfrac{1^2}{2} + 3\times1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \dfrac{9}{2} + 9 - \dfrac{1}{2} - 3 - \mathrm{e}^{-3} + \mathrm{e}^{-1} =$
$10 - \mathrm{e}^{-3} + \mathrm{e}^{-1} \approx 10{,}318$, soit $10{,}32$ cm^2 au mm^2 près. (Ce résultat peut se contrôler graphiquement)