Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie civil Métropole juin 2004

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** On a $|z_1|^2 = 3+1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_1| = 2$.

   On peut en factorisant écrire $z_1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

   Un argument de z_1 est donc : $\dfrac{\pi}{6}$

   b. $z_2 = \dfrac{z_1^2}{2} = \dfrac{3-1+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

   $z_3 = \dfrac{4}{z_2} = \dfrac{4}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{4\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)} = \dfrac{4\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}{1+3} = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

2. **a.** On a vu que $z_{\mathrm{A}} = 2$; d'autre part $|z_{\mathrm{B}}|^2 = |z_{\mathrm{D}}|^2 = 1+3 = 4 = 2 \Rightarrow |z_{\mathrm{B}}| = |z_{\mathrm{D}}| = 2$.
   Enfin $|z_{\mathrm{C}}|^2 = 3+1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_{\mathrm{C}}| = 2$.

   On a donc OA = OB = OC = OD = 2 ce qui montre que les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 2. Voir la figure à la fin.

   b. Calculer $|z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}|$ et $|z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{A}}|$.

   c. L'affixe de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3} - \left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right) = 1-\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

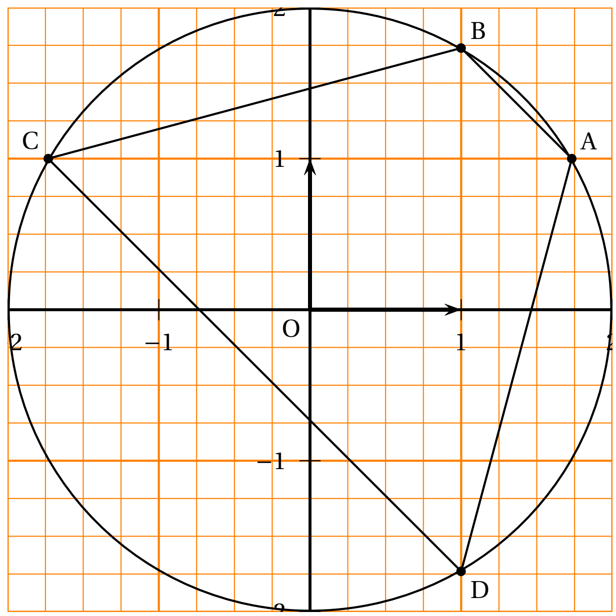
   De même l'affixe de $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ est $z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}} = 1-\mathrm{i}\sqrt{3} - \left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right) = 1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(-1-\sqrt{3}\right)$.

   Calculons : $-\left(\sqrt{3}+2\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\left(\sqrt{3}+2\right)\left[1-\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)\right] =$
   $-\sqrt{3}+3-2+2\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(-3+\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}\right) = 1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(-1-\sqrt{3}\right) = z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}}$.
   L'égalité est ainsi démontrée.

   Autre méthode : On peut aussi écrire :
   $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = \left(1-\sqrt{3}\right)(1-\mathrm{i})$ et
   $z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}} = \left(1+\sqrt{3}\right)(1-\mathrm{i})$.

   On a donc $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\left(\sqrt{3}+2\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

   d. La question précédente montre en prenant le module que AD $= \left(\sqrt{3}+2\right)$AB. La première égalité est donc fausse, de même que la seconde puisque $\sqrt{3}+2 \neq 3$.
   L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ est $z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{A}} = 1-\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(-1-\sqrt{3}\right)$. Donc
   $\mathrm{AD}^2 = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 + \left(-1-\sqrt{3}\right)^2 = 1+3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3} = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$.
   L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ est $z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}} = -1-\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(1-\sqrt{3}\right)$. Donc
   $\mathrm{BC}^2 = \left(-1-\sqrt{3}\right)^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)^2 = 1+3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3} = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$.
   On a donc AD = BC = $2\sqrt{2}$.
   Or on a vu que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires ce qui signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
   Conclusion : le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle. La dernière proposition est vraie.



EXERCICE 2 **4 points**

Partie A

1. Il y a 200 membres sur 600 participants, donc la probabilité est égale à $\dfrac{200}{600} = \dfrac{1}{3}$.
2. Payent plus de 7 € :
   - les jeunes entre 11 et 16 ans non-membre : il y en a 100;
   - les plus de 16 ans membres (payant 8 €) et non-membres (payant 10 €) : il y en a 300.

   En tout 400 personnes sur 600 paient plus de 7 €soit une probabilité de $\dfrac{400}{600} = \dfrac{2}{3}$.
3. Seuls les membres entre 11 et 16 ans paient 6,40 €; il y en a 40 sur 600, donc $p(X = 6,40) = \dfrac{40}{600} = \dfrac{4}{60} = \dfrac{1}{15}$.
4. Pour les non-membres le prix est respectivement 5, 8 ou 10 € et pour les membres respectivement 4, 6,40 et 8 €. Donc $X \in \{4\ ;\ 5\ ;\ 6,40\ ;\ 8\ ;\ 10\}$.

   D'où le tableau de la loi de probabilité de X suivant :

X	4	5	6,40	8	10
$p(X = x_i)$	$\dfrac{50}{600}$	$\dfrac{110}{600}$	$\dfrac{40}{600}$	$\dfrac{210}{600}$	$\dfrac{190}{600}$

5. On a $\text{e}(X) = 4 \times \dfrac{50}{600} + 5 \times \dfrac{110}{600} + 6,4 \times \dfrac{40}{600} + 8 \times \dfrac{210}{600} + 10 \times \dfrac{190}{600} = \dfrac{200 + 550 + 256 + 1\,680 + 1\,900}{600} = \dfrac{4\,586}{600} \approx 7,64$ € à 1 centime près.

Partie B

La recette a déjà été calculée :
$4 \times 50 + 5 \times 110 + 6,4 \times 40 + 8 \times 210 + 10 \times 190 = 200 + 550 + 256 + 1\,680 + 1\,900 = 4\,586$ €.

PROBLÈME **11 points**

Préliminaires :

1. On a $-1 < x \Rightarrow -2 < 2x \Rightarrow -2+2 < 2x+2$, soit $2x+2 > 0$.
   De même $-1 < x \iff -1+2 < x+2 \iff 1 < x+2$ ou $x+2 > 1 > 0$.
2. Cherchons les racines de ce trinôme : $\Delta = 9-4 = 5 > 0$; il y a donc deux racines réelles : $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.
   Le trinôme est donc positif sauf entre les racines donc dans l'intervalle $\left]\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\ ;\ \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right[$. Or $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \approx -2,6$ et $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \approx -0,4$. Seul ce dernier nombre est supérieur à -1, donc le trinôme ne s'annule sur $]-1\ ;\ +\infty[$ que pour $\alpha = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

Partie A : Limites et asymptotes

1. On a $\lim\limits_{x\to-1} \ln(x+2) = 0$, car $\lim\limits_{x\to-1} (x+2) = 1$.
   Comme $\lim\limits_{x\to-1} 2x+2 = 0$, $\lim\limits_{x\to-1} \ln(2x+2) = -\infty$, donc par somme de limites :
   $$\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty.$$
   Géométriquement ceci signifie que la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C})$ au voisinage de -1.
2. **a.** On a $f(x) = -x + \ln(2x+2) - \ln(x+2) = -x + \ln 2(x+1) - \ln(x+2) =$
   $-x + \ln 2 + \ln(x+1) - \ln(x+2) = -x + \ln 2 + \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$. (on a utilisé les formules $\ln a \times b = \ln a + \ln b$ et $\ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.)

   b. Pn a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x+2} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = 0$.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$, on a par somme de limites :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

   c. Soit d la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :
   $d(x) = f(x) - (-x + \ln 2) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$.
   On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x) = 0$.
   Ceci signifie que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + \ln(2)$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

   d. Pour $x > -1$ on $0 < x+1 < x+2$ d'où $0 < \dfrac{x+1}{x+2} < 1$ et par croissance de la fonction ln, on a $\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) < \ln 1 = 0$.
   La fonction d est donc négative sur $]-1\ ;\ +\infty[$ ce qui signifie que la courbe $(\mathscr{C})$ est en dessous de la droite $\mathscr{D}$.

Partie B : étude des variations

1. On a en dérivant chaque terme :
   $f'(x) = -1 + \dfrac{2}{2x+2} - \dfrac{1}{x+2} = -1 + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{-(x+1)(x+2) + x+2 - (x+1)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{-x^2-2x-x-2+x+2-x-1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{-x^2-3x-1}{(x+1)(x+2)} = -\dfrac{x^2+3x+1}{(x+1)(x+2)}$.

2. On sait que sur $]-1\,;\,+\infty[$, $(x+1)(x+2) > 0$, donc le signe de la dérivée est celui de $-(x^2+3x+1)$ c'est-à-dire l'opposé du signe du trinôme étudié ci-dessus. Donc :
   - sur $\left]-1\,;\,\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right]$, $f'(x) \geqslant 0$, donc f est croissante ;
   - sur $\left[\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\,;\,+\infty\right[$, $f'(x) \leqslant 0$, donc f est décroissante.
3. Il y a un maximum en $\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$ qui vaut $f\left(\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right) \approx 0,1$.

   D'où le tableau de variations :

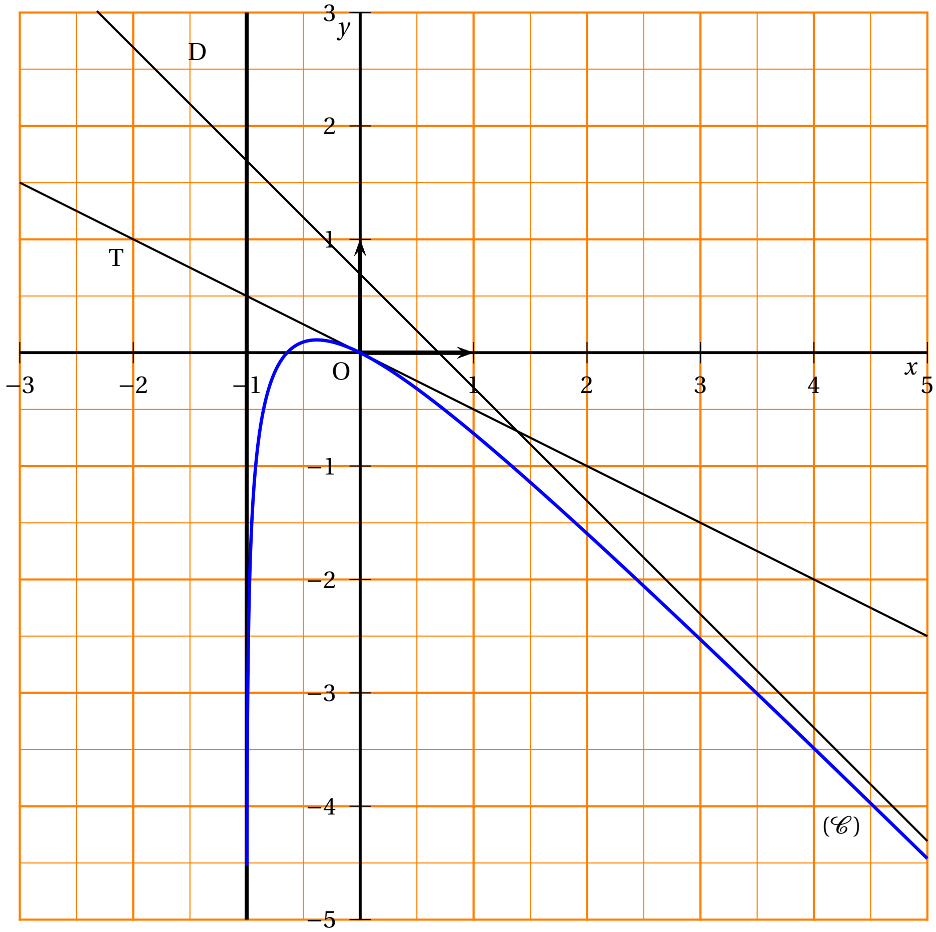
x	-1		$\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\approx 0,1$	$\searrow$	$-\infty$

Partie C : Représentation graphique

1. Sur $[-0,8\,;\,-0,4]$ la fonction f est dérivable et sur cet intervalle $f'(x) \geqslant 0$; or $f(-0,8) \approx -0,3$ et $f(-0,4) \approx 0,1$.
   Comme $0 \in [-0,3\,;\,0,1]$, il existe une valeur unique β telle que $f(\beta) = 0$.
   La calculatrice donne $-0,65 < \beta < -0,64$.
2. Une équation de la droite T est de la forme :
   $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit avec $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $f(0) = 0$:
   $M(x\,;\,) \in \text{T} \iff y = -\dfrac{1}{2}x$.
3.

x	$-0,8$	$\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$	0	0,5	1	2
$f(x)$	$-0,3$	0,1	0	$-0,3$	$-0,7$	$-1,6$

4.



y
x
D
T
O
(𝒞)
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5