Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI juin 2006
Métropole Génie mécanique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

1. $z = \dfrac{z_A}{z_B} = \dfrac{\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{6}}{2-2\text{i}} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{6}\right)(2+2\text{i})}{(2-2\text{i})(2+2\text{i})} = \dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}+2\text{i}\sqrt{2}+2\text{i}\sqrt{6}}{4+4} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$

2. a. On a $|z_A|^2 = 2+6 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow |z_A| = 2\sqrt{2}$.

On peut écrire : $z_A = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\text{i}\frac{\pi}{3}\right)$.

Un argument de z_A est donc $\dfrac{\pi}{3}$.

De même $|z_B|^2 = 4+4 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow |z_B| = 2\sqrt{2}$.

On peut écrire : $z_B = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+\text{i}\cos\frac{-\pi}{4}\right)$.

Un argument de z_B est donc $-\dfrac{\pi}{4}$.

b. De la question précédente on déduit que, $|z| = \left|\dfrac{z_A}{z_B}\right| = \dfrac{|z_A|}{|z_A|} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$.

De plus $\arg(z) = \arg(z_A - \arg(z_B = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{-\pi}{4} = \dfrac{4\pi}{12}+\dfrac{3\pi}{12} = \dfrac{7\pi}{12}$.

c. La question précédente donne l'écriture trigonométrique de $z = 1\text{e}^{\frac{7\pi}{12}} = \cos\frac{7\pi}{12}+\text{i}\sin\frac{7\pi}{12}$.

3. n identifiant la dernière écriture avec celle du 1., on obtient, pour la partie réelle :

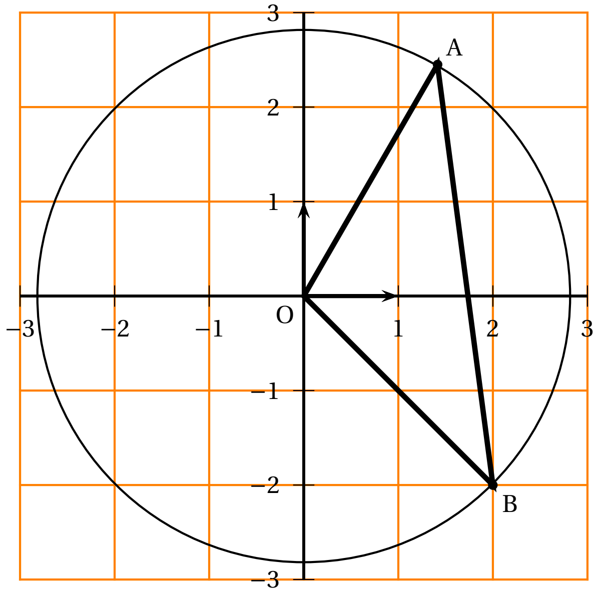
$\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; et pour la partie imaginaire :

$\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

4. a. Voir à la fin de l'exercice.

b. On a $|z_A| = 2\sqrt{2} = |z_B| = 2\sqrt{2} = \text{OA} = \text{OB}$, donc le triangle AOB est isocèle en O.

Comme $\widehat{\text{AOB}} = 105°$, le triangle n'est pas rectangle.



EXERCICE 2 **4 points**

1. **a.** Calculons $f(\pi) = 2 - \sin\frac{\pi}{2} = 2 - 1 = 1$.
   $\mathscr{C}$ contient $\text{S}(\pi\ ;\ 1)$.

   b. La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ 2\pi]$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$.
   En particulier $f(\pi) = -\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{1}{2}\times 0 = 0$.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point S est parallèle à l'axe des abscisses.

   c. Sur $[0\ ;\ 2\pi]$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ donc
   $f''(x) = -\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\sin\frac{x}{2} = 14\sin\frac{x}{2}$.
   Donc $4f''(x) + f(x) - 2 = \sin\frac{x}{2} + 2 - \sin\frac{x}{2} - 2 = 0$,
   ce qui signifie que f est solution de l'équation différentielle : $4y'' + y - 2 = 0$.

2. **a.** $g(x) = [f(x)]^2 = \left[2 - \sin\frac{x}{2}\right]^2 = 4 + \sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}$ (1).
   Or $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - \sin^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \iff$
   $\sin^2\frac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos x}{2}$.
   En remplaçant dans (1) :
   $\cos x = 4 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos x}{2} - 4\sin\frac{x}{2} = \dfrac{9}{2} - 4\sin\frac{x}{2} - \dfrac{\cos x}{2}$.

   b. On en déduit que :
   $\text{V} = \pi\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)\,\text{d}x = \pi\int_0^{2\pi}\left[\dfrac{9}{2} - 4\sin\dfrac{x}{2} - \dfrac{\cos x}{2}\right]\text{d}x = \pi\left[\dfrac{9x}{2} + 8\cos\dfrac{x}{2} - 2\dfrac{\sin x}{2}\right]_0^{2\pi} =$
   $\pi\left(\dfrac{9\times 2\pi}{2} + 8\cos\frac{2\pi}{2} - 2\dfrac{\sin 2\pi}{2}\right) - \pi\left[\dfrac{9\times 0}{2} + 8\cos\frac{0}{2} - 2\dfrac{\sin 0}{2}\right] =$
   $\pi(9\pi - 8 - 8) = \pi(9\pi - 16)$ unités de volume.
   Comme 1 u. a. $= 2\times 2\times 2 = 8\ \text{cm}^3$, on a finalement :
   $\text{V} = 8\pi(9\pi - 16) \approx 308,488\ \text{cm}^3$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. En écrivant pour $x > -1$,et $x \neq 0$, $\dfrac{2x}{1+x} = \dfrac{2}{\frac{1}{x}+1}$, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on en déduit que

   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{1+x} = 2$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$, on a finalement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Posons $X = 1+x$. On a :
   $\displaystyle\lim_{X\to 0} X\ln X = 0 \iff \lim_{x\to -1} (1+x)\ln(1+x) = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-1} 2x-(1+x)\ln(1+x) = -2$.
   Enfin $\displaystyle\lim_{x\to-1} \dfrac{1}{1+x} = +\infty$ et par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$.

   b. Le résultat précédent montre que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$ au voisinage de -1.

3. En dérivant terme à terme :
   $f'(x) = \dfrac{2(1+x)-1\times 2x}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2-(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{1-x}{(1+x)^2}$.

4. **a.** Comme sur $]-1\ ;\ +\infty[$, $(1+x)^2 > 0$ le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $1-x$.
   - $1-x > 0 \iff 1 > x \iff x < 1$; donc $f'(x) > 0$ sur $]-1\ ;\ 1[$;
   - $1-x < 0 \iff 1 < x \iff x > 1$; donc $f'(x) < 0$ sur $]1\ ;\ +\infty[$;
   - $1-x = 0 \iff x = 1$, donc $f'(1) = 0$.

   b. On a $f(1) = \dfrac{2}{1+1} - \ln(1+1) = 1-\ln 2$.

   c. La fonction est donc croissante sur $]-1\ ;\ 1[$ et décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$. D'où le tableau de variations :

x	-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

Partie B

1. On a $M(x\ ;\ y) \in \mathcal{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.
   Avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, on obtient :
   On a $M(x\ ;\ y) \in \mathcal{T} \iff y = x$.

2. **a.** On sait que $f(1) = 1-\ln 2 \approx 0,31 > 0$ et $f(5) = \dfrac{10}{6} - \ln 6 \approx -0,13 < 0$.
   Sur l'intervalle $[1\,;\,5]$ la fonction f est décroissante de $f(1) > 0$ à $f(5) < 0$. Il existe donc une valeur unique de x telle que $f(x) = 0$ sur cet intervalle. Soit α cette solution. On a donc $f(\alpha) = 0 \iff \dfrac{2\alpha}{1+\alpha} - \ln(1+\alpha) \iff \dfrac{2\alpha}{1+\alpha} = \ln(1+\alpha)$.

   b. La calculatrice donne $3,9 < \alpha < 4$, puis $3,92 < \alpha < 3,93$, la valeur la plus proche étant 3,92.

3. On a vu que sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction est croissante de 0 à $1-\ln 2 \approx 0,31$ et sur l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$ elle décroit de $1-\ln 2$ à 0. Conclusion : sur $[O\ ;\ \alpha]$ $f(x) \geqslant 0$.

4. Figure à la fin.

Partie C

1. On a $F'(x) = -1\ln(1+x) + \dfrac{-3-x}{1+x} + 3 = \dfrac{-3-x+3+3x}{1+x} - \ln(1+x) = \dfrac{2x}{1+x} - \ln(1+x) = f(x)$.

Ce résultat signifie que F est une primitive de f sur $]-1~;~+\infty[$.

2. a. Voir la figure.

b. On a vu que sur $[0~;~\alpha]$, la fonction f est positive, donc l'aire de la surface hachurée est égale à l'intégrale de la fonction f entre 0 et α :

$\mathscr{A}(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{\alpha} = F(\alpha) - F(0) = (-3-\alpha)\ln(1+\alpha) + 3\alpha - [(-3-0)\ln(1+0) + 3\times 0] = 3\alpha - (3+\alpha)\ln(1+\alpha)$.

Or on a vu que $\ln(1+\alpha) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha}$, donc :

$\mathscr{A}(\alpha) = 3\alpha - (3+\alpha)\times\dfrac{2\alpha}{1+\alpha} = \dfrac{3\alpha(1+\alpha) - 2\alpha(3+\alpha)}{1+\alpha} = \dfrac{3\alpha + 3\alpha^2 - 6\alpha - 2\alpha^2}{1+\alpha} = \dfrac{\alpha^2 - 3\alpha}{1+\alpha}$ u. a.

Or une unité d'aire est égale à 1 u. a. $= 2\times 1 = 2$ cm^2.

Donc $\mathscr{A}(\alpha) = 2\left(\dfrac{\alpha^2 - 3\alpha}{1+\alpha}\right)$