Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie civil, mécanique Métropole 21 juin 2012

EXERCICE 1 **6 points**

1.

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

On calcule le déterminant : $\Delta = \left(8\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 64 = 3 \times 64 - 4 \times 64 = -64 = (8\text{i})^2 < 0$.
L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{8\sqrt{3} + 8\text{i}}{2} = 4\sqrt{3} + 4\text{i} \quad \text{et} \quad z_2 = 4\sqrt{3} - 4\text{i}.$$

2. **a.** On a $8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}} = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{3} + 4\text{i} = z_{\text{B}} = z_1$.

b. On a $z_{\text{C}} = z_2 = \overline{z_1} = \overline{z_{\text{B}}} = \overline{8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}} = 8\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

c. z_{B} et z_{C} ont pour module 8 et pour parties imaginaire 4 et -4, leurs parties réelles étant positives ; B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 8 et respectivement aux droites d'équation $y = 4$ et $y = -4$. Voir l'annexe 1

d. On sait déjà que $\text{OB} = |z_{\text{B}}| = 8$ et $\text{OC} = |z_{\text{C}}| = 8$.
De plus $\text{BC} = |z_{\text{C}} - z_{\text{B}}| = \left|4\sqrt{3} - 4\text{i} - \left(4\sqrt{3} + 4\text{i}\right)\right| = |-8\text{i}| = 8$.
Donc OB = OC = BC = 8 : le triangle OBC est équilatéral.

3. **a.** $z_{\text{A}} = 3$ et $z_{\text{D}} = 4\sqrt{3}$.

b. On a $z_{\text{E}} = \dfrac{1}{2}\left(z_{\text{B}} + z_{\text{D}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(4\sqrt{3} + 4\text{i} + 4\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} + 2\text{i}$.
De même on obtient $z_{\text{F}} = 4\sqrt{3} - 2\text{i}$.

c. z_{D} et z_{B} ont même partie réelle. D est donc le projeté orthogonal de B sur l'axe des abscisses.
z_{E} et z_{F} ont aussi la même partie réelle $4\sqrt{3}$; on les construit grâce à leurs parties imaginaires (reps. 2 et -2). Voir l'annexe 1.

d. On sait que B et C sont symétriques autour du point D ; donc DB = DC = 4. Par suite DE = DF = 2 et comme (AD) est perpendiculaire à (EF), la droite (AD) est à la fois hauteur et médiane du triangle AEF, ce triangle est isocèle en A.
Son aire est donc égale à $\dfrac{\text{EF} \times \text{AD}}{2} = \dfrac{4 \times \left(4\sqrt{3} - 3\right)}{=} 2\left(4\sqrt{3} - 3\right) = 8\sqrt{3} - 6$.

4. OBC est équilatéral ; son aire est donc égale à $\dfrac{\text{BC} \times \text{OD}}{2} = \dfrac{8 \times 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$.
L'aire des deux quadrilatères est donc égale à la différence des aires des deux triangles isocèles OBC et AEF soit $16\sqrt{3} - \left(8\sqrt{3} - 6\right) = 8\sqrt{3} + 6$.
La figure ayant pour axe de symétrie l'axe des abscisses, les deux quadrilatères OAEB et OCFA ont la même aire soit $\dfrac{8\sqrt{3} + 6}{2} = 4\sqrt{3} + 3$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** $X \in \{2\ ;\ 1\ ;\ -2\}$ (si le joueur trouve respectivement le triangle, un quadrilatère ou rien).

b. Le tableau de la loi de probabilité de la variable X est :

x_i	3	1	-2
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

c. On a $\text{E}(X) = 3 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{6} - 2 \times \frac{3}{6} = \frac{3+2-6}{6} = -\frac{1}{6}$.

Ce résultat signifie que sur un grand nombre de parties le joueur perdra en moyenne $\frac{1}{6}$ d'euro soit environ 17 centimes, ou encore 1 € toutes les six parties.

d. Le forain doit gagner dans la journée au moins 45 €. Comme il gagne en moyenne $\frac{1}{6}$ € par parties il devra donc organiser au moins $\frac{5}{\frac{1}{6}} = 45 \times 6 = 270$ parties.

2. Vous misez 2 €. Vous lancez un dé équilibré :
- si le 6 sort, vous gagnez 5 € ;
- si un autre nombre pair sort (2 ou 4) vous gagnez 3 € ;
- si un nombre impair sort, vous ne gagnez rien.

PROBLÈME **9 points**

Partie A

Pour tout réel g est dérivable et $g'(x) = -0,1 \times 2\text{e}^{-0,1x} = -0,2\text{e}^{-0,1x}$.
On calcule :
$g'(x) + 0,1g(x) = -0,2\text{e}^{-0,1x} + 0,1 \times 2\text{e}^{-0,1x} = 0$
Donc la fonction g est solution de l'équation différentielle.

Partie B

1. a. En posant $u(x) = \text{e} + x$, $f(x) = 2\ln u(x)$ a pour fonction dérivée :
$f'(x) = \frac{2u'(x)}{u(x)} = \frac{2 \times 1}{\text{e}+x} = \frac{2}{\text{e}+x}$.

b. Comme $2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du dénominateur $\text{e} + x$. Or :
$\text{e} + x > 0 \iff x > -\text{e}$, ce qui est vrai puisque $x \geqslant -2$. La dérivée est donc positive : la fonction f est croissante sur $[-2~;~0]$ de $f(-2) = 2\ln(\text{e}-2) \approx -0,66$ à $2\ln(\text{e}) = 2$.

2. Dans $[-2~;~0]$, $f(x) = 0 \iff 2\ln(\text{e}+x) = 0 \iff \ln(\text{e}+x)^2 = \ln 1 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien $(\text{e}+x^2 = 1 \iff \text{e}+x = 1$ ou $\text{e}+x = -1$, soit finalement :
x = 1 - e ou x = - 1 - e.

Or $-1-\text{e} \approx -3,7 \notin [-2~;~0]$.
L'équation a une solution unique dans $[-2~;~0]$: $1-\text{e}$.
Autre méthode : sur $[-2~;~0]$ la fonction f est strictement croissante de $2\ln(\text{e}-2) < 0$ à $2 > 0$. Il existe donc un unique réel de $[-2~;~0]$ qui annule f.
Or $f(1-\text{e}) = 2\ln(\text{e}+1-\text{e}) = 2\ln 1 = 2 \times 0 = 0$.
La solution unique est donc bien $1 - \ln \text{e}$.

3. a. Une équation de la tangente est :
$M(x~;~y) \in (T) \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$
Avec $f(0) = 2\ln(\text{e}) = 2 \times 1 = 2$ et $f'(0) = \frac{2}{\text{e}+0} = \frac{2}{\text{e}}$ l'équation devient :
$M(x~;~y) \in (T) \iff y - 2 = \frac{2}{\text{e}}(x-0) \iff y = \frac{2}{\text{e}}x + 2$.

b. $\text{A}(-\text{e}~;~0) \in (T) \iff 0 = \frac{2}{\text{e}} \times (-\text{e}) + 2 \iff 0 = -2+2$ qui est bien vraie. Donc $\text{A} \in [T)$.

c. La tangente est la droite (AB).

d. Voir l'annexe 2.

Partie C

Voir l'annexe 2.

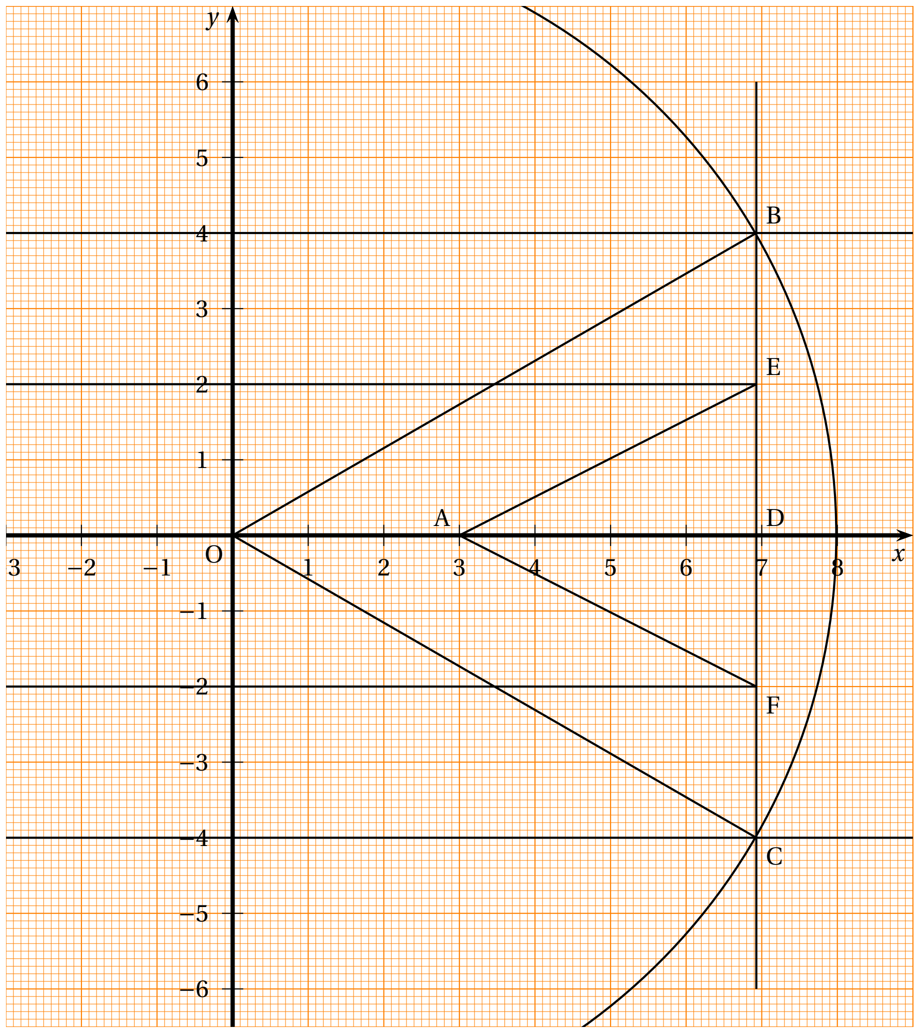
Partie D

1. La calculatrice livre $I = 4\mathrm{e} - 8 \approx 2{,}873\,1 \approx 2,873$ à 10^{-3} près.
2. **a.** H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0\,;\,3]$:
   $H'(x) = -0,2 \times (-20)\mathrm{e}^{-0,2x} = 4\mathrm{e}^{-0,2x} = 2^2 \times \left(\mathrm{e}^{-0,1x}\right)^2 = \left[2\mathrm{e}^{-0,1x}\right]^2 = [g(x)]^2$.
   Donc H est une primitive de la fonction qui à tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,3]$ associe $(g(x))^2$.

   b. D'après le résultat précédent :
   $J = \left[H(x)\right]_0^3 = H(3) - H(0) = -20\mathrm{e}^{-0,2\times3} + 20\mathrm{e}^{-0,2\times0} = -20\mathrm{e}^{-0,6} + 20 = 20\left(1 - \mathrm{e}^{-O,6}\right)$.

   c. La calculatrice donne $J \approx 9{,}023\,7 \approx 9,024$ à 10^{-3} près.
3. En décomposant en deux volumes on a :
   $V = \pi\int_{1-\mathrm{e}}^{0} [f(x)]^2\,\mathrm{dx} + \pi\int_0^3 [g(x)]^2\,\mathrm{d}x = \pi \times I + \pi \times J = \pi(I + J) \approx 3,141 \times (2,873 + 9,024) \approx 37,38$ unités d'aire soit environ 37 cm^2.
   Réponse D.

Annexe 1



Annexe 2