Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie civil Métropole 16 septembre 2010

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** $P(3) = 3^3 - 27 = 27 - 27 = 0$, donc 3 est une solution de l'équation $P(z) = 0$.
On en déduit que $P(z) = z^3-27 = (z-3)\left(az^2 + bz + c\right) = az^3+(b-3a)z^2+(c-3b)z-3c = 0$.
On obtient par identification : $a = 1,\ c = 9$, d'où $b-3 = 0 \iff b = 3$ et $9-3b = 0 \iff b = 3$.
On a donc $P(z) = z^3 - 27 = (z-3)\left(z^2+3z+9\right)$.

   b. Comme $\delta = 3^2-4\times 9 = 9-4\times 9 = -3\times 9 = \left(3\text{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

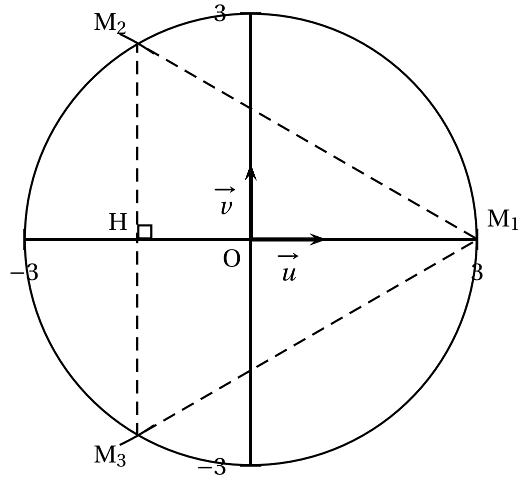
$$\frac{-3+3\text{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-3-3\text{i}.\sqrt{3}}{2}$$

   c. $P(z) = 0 \iff (z-3)\left(z^2+3z+9\right) = 0 \iff \begin{cases} z-3 = 0 \\ z^2+3z+9 = 0 \end{cases}$
D'après les deux questions précédentes les trois solutions de l'équation sont
$\dfrac{-3+3\text{i}\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad 3 \quad ; \quad \dfrac{-3-3\text{i}\sqrt{3}}{2}$.

2. **a.** On a $|z_2|^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{4} = \dfrac{36}{4} = 9 = 3^2$, donc $|z_2| = 3$.
On peut en factorisant écrire :
$z_2 = 3\left(-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\text{e}^{\frac{2\pi}{3}\text{i}}$.
Comme $z_3 = \overline{(z_2)}$, on a $z_3 = 3\text{e}^{-\frac{2\pi}{3}\text{i}}$.
La bonne écriture est la 3.

   b. Voir la figure plus bas. Il s'agit de tracer les deux triangles équilatéraux dont un côté a pour extrémité O et l'autre le point d'affixe -3.
On peut aussi construire les points M_2 et M_3 avec leur partie réelle : ils sont tous deux sur la droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ et sur le cercle de centre O et de rayon 3.

   c. Proposition 1 : Fausse : M_2 et M_3 sont symétriques autour de l'axe des abscisses : ils sont donc équidistants de M_1 et $M_1M_2 = M_1M_3$
Proposition 2 : H étant le projeté orthogonal de M_2 (ou M_3) sur l'axe des abscisses, l'aire cherchée est le double de l'aire du triangle rectangle M_1HM_2, soit :
$2\times HM_1\times HM_2\times\dfrac{1}{2} = \left(3+\frac{3}{2}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2.
L'affirmation est vraie.



EXERCICE 2 **6 points**

Partie A - Échantillon du lundi

1.

Tableau du lundi	Pièces présentant un défaut de dimension	Pièces ne présentant pas de défaut de dimension	Total
Pièces présentant un défaut d'épaisseur de caoutchouc	2	13	15
Pièces ne présentant pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc	3	232	235
Total	5	245	250

2. Le pourcentage est égal à : $\dfrac{235}{250} \times 100 = \dfrac{940}{1\,000} \times 100 = 94\,\%$

Partie B - Échantillon du mardi

1. **a.** 3 pots en moyenne sur un prélèvement de 200 présentent un défaut de dimension, donc $p(D) = \dfrac{3}{200}$.
   $2 + 187 = 189$ pots sur 200 ne présentent pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc, donc $p(E) = \dfrac{189}{200}$.

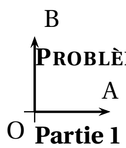
   b. $D \cap E$ représente l'évènement : « le pot prélevé présente un défaut de dimension et ne présente pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc ». Il y en a 2, donc $p(D \cap E) = \dfrac{2}{200} = \dfrac{1}{100}$;
   $D \cup E$ représente l'évènement : « le pot prélevé présente un défaut de dimension ou ne présente pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc ». Il y en a 2.
   On sait que $p(D \cup E) = p(D) + p(E) - p(D \cap E)$.
   On a $p(D) = \dfrac{3}{200}$ et $p(E) = \dfrac{189}{200}$, donc $p(D \cup E) = \dfrac{3}{200} + \dfrac{189}{200} - \dfrac{2}{200} = \dfrac{190}{200} = \dfrac{95}{100}$.

2. **a.** Les valeurs de X possibles sont : 0,20 = 1,50 - 1,30 ; 0,05 = 1,50 - 1,45 et $-1,30 = 0 - 1,30$.

   b. Il y a en moyenne 10 pots sut 200 présentant le seul défaut d'épaisseur, donc $p(X = 0,05) = \dfrac{10}{200} = \dfrac{1}{20}$.

c. Pots sans défaut : $p(X = 0,20) = \dfrac{187}{200}$, donc il reste $p(X = -1,30) = 1 - \dfrac{10}{200} - \dfrac{187}{200} = \dfrac{12}{200} = \dfrac{6}{100}$.

d. On a $\text{E}(X) = 0,20 \times \dfrac{187}{200} + 0,05 \times \dfrac{10}{200} - 1,30 \times \dfrac{6}{100} = 0,187 + 0,025 - 0,078 = 0,134$ (€).
Ceci signifie qu'en moyenne l'entreprise gagnera 134 € pour une production de 1 000 pots.



Problème **9 points**

Partie 1 - Étude de la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}$

1. On lit $f(0) = 4$. Donc $f(0) = a - \dfrac{1+1}{2} = 4 \iff a = 5$. Conclusion :

$$f(x) = 5 - \frac{\text{e}^{0,2x} + \text{e}^{-0,2x}}{2}$$

2. On a pour $x \in [-8 ; 8]$, $f(-x) = 5 - \dfrac{\text{e}^{-0,2x} + \text{e}^{0,2x}}{2} = f(x)$.
La fonction est paire car $f(-x) = f(x)$ sur un intervalle symétrique autour de 0. Sa courbe représentative est donc symétrique autour de l'axe des ordonnées.

3. f est la somme de fonctions dérivables sur $[-8 ; 8]$ et :
$f'(x) = 0 - \left[\dfrac{1}{2}\left(0,2\text{e}^{0,2x} - 0,2\text{e}^{-0,2x}\right)\right] = 0,1\left(\text{e}^{-0,2x} - \text{e}^{0,2x}\right) = \dfrac{1}{10}\text{e}^{-0,2x}\left(1 - \text{e}^{0,4x}\right)$.

4. On a donc $f'(0) = \dfrac{1}{10} \times 1(1-1) = 0$. Le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0 est nul, cette tangente est horizontale et contient le point $(0 ; 4)$. L'équation de la tangente $\mathscr{T}$ est donc $y = 4$.

5. $f'(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{10}\text{e}^{-0,2x}\left(1 - \text{e}^{0,4x}\right) \geqslant 0 \iff \text{e}^{-0,2x}\left(1 - \text{e}^{0,4x}\right) \geqslant 0 \iff 1 - \text{e}^{0,4x} \geqslant 0$, car quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{e}^{-0,2x} > 0) \iff 1 \geqslant \text{e}^{0,4x} \iff \ln 1 \geqslant 0,4x \ln \text{e}$ (par croissance de la fonction ln) $\iff 0 \geqslant 0,4x \iff x \leqslant 0$.
On a donc $f'(x) \geqslant 0 \iff -8 \leqslant x \leqslant 0$.

6. D'après la question précédente la fonction est croissante sur l'intervalle $\left[-8 ; \dfrac{1}{4}\right]$.
On obtiendrait de même que $f'(x) \leqslant 0 \iff 0 \leqslant x \leqslant 8$.
D'autre part : $f(-8) = 5 - \dfrac{\text{e}^{-1,6} + \text{e}^{1,6}}{2} = f(8) \approx 2,42$ d'après la question 2. D'où le tableau de variations :

x	-8		0		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\approx 2,42$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\approx 2,42$

7.

x	4	5,5	8
$f(x)$	3,67	3,33	2,42

Les véhicules circulant à droite il faut considérer la hauteur au niveau de $x = 4$, soit $f(4) \approx 3,67$ diminuée de la hauteur de sécurité de 50 cm.

Il faut donc limité la hauteur de passage maximale à 3,17 cm.

Partie 2 - Calcul d'aire

1. Une primitive de la fonction $x \longmapsto \text{e}^{ax}$, avec $a \in \mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\text{e}^{ax}$, donc
$I = \displaystyle\int_{-8}^{8} \left(\text{e}^{0,2x} + \text{e}^{-0,2x}\right)\,\text{d}x = \left[\dfrac{1}{0,2}\left(\text{e}^{0,2x} + \dfrac{1}{-0,2}\text{e}^{-0,2x}\right)\right]_{-8}^{8} = 5\left[\text{e}^{0,2x} - \text{e}^{-0,2x}\right]_{-8}^{8} =$
$5\left[\text{e}^{1,6} - \text{e}^{-1,6} - \text{e}^{-1,6} + \text{e}^{1,6}\right] = 5\left[2\text{e}^{1,6} - 2\text{e}^{-1,6}\right] = 10\left(\text{e}^{1,6} - \text{e}^{-1,6}\right)$ m^2, puisque l'unité d'aire est égale à 1 = 1 m^2.
2. On a vu que sur $[-8\ ;\ 8]$ la fonction f est positive ; donc l'aire de la surface limitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x : -8$ et $x = 8$ est égale à :
$\displaystyle\int_{-8}^{8}\left[5 - \dfrac{\text{e}^{0,2x} + \text{e}^{-0,2x}}{2}\right]\,\text{d}x = \int_{-8}^{8} 5\,\text{d}x - \int_{-8}^{8}\left(\text{e}^{0,2x} + \text{e}^{-0,2x}\right) = 40 - (-40) - I = 80 - I$
L'aire de la surface hachurée est donc la différence de l'aire du rectangle de longueur 16 et de hauteur 5 et de l'aire précédente soit :
$16 \times 5 - (80 - I) = 80 - 80 + I = I = 10\left(\text{e}^{1,6} - \text{e}^{-1,6}\right)$.
3. On a $I = 10\left(\text{e}^{1,6} - \text{e}^{-1,6}]\right) \approx 47,511 \approx 47,51$ m^2
4. Un bidon de 30 litres permet de peindre $30 \times 0,3 = 9$ m^2.
Pour peindre les deux faces il faut donc $2 \times \dfrac{47,11}{9} \approx 10,5$.
Il faut donc acheter 11 bidons.