Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Polynésie juin 2010 Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

1. $\Delta = 16 - 4 \times 8 = 16 - 32 = -16 = (4\text{i})^2$.
Il y a donc deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4+4\text{i}}{2} = 2+2\text{i} \text{ et } z_2 = 2-2\text{i}.$$

2. a. On a $a = z_1 = 2+2\text{i}$, donc $|a|^2 = 4+4 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$, ce qui implique que $|a| = 2\sqrt{2}$.
En factorisant ce module on peut écrire :
$a = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
De même $|b|^2 = 1+3 = 4 = 2^2$, d'où $|b| = 2$ et en factorisant ce module :
$b = 2\left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

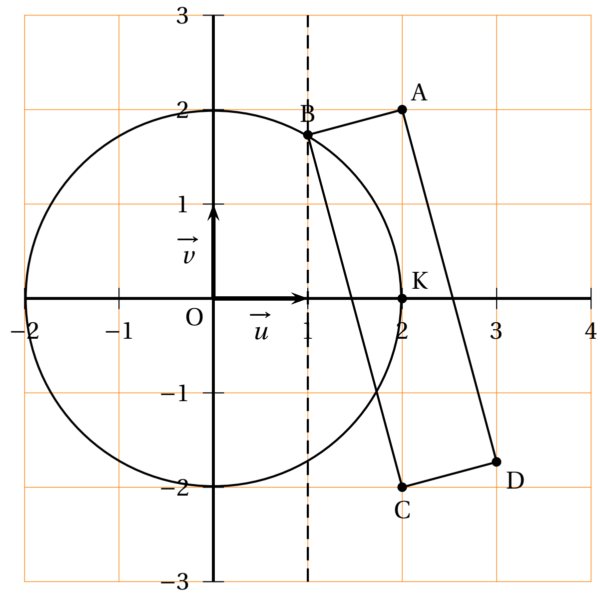
b. On a $\frac{a+c}{2} = \frac{2+2\text{i}+2-2\text{i}}{2} = 2 = k$.
De même : $\frac{b+d}{2} = \frac{1+\text{i}\sqrt{3}+3-\text{i}\sqrt{3}}{2} = 2 = k$, ce qui montre que K est le milieu des segments [AC] et [BD].

c. Les points A et C sont symétriques autour de (Ox). K est donc le point d'intersection de (Ox) et de la droite (AC).
Le point B appartient au cercle de centre O et de rayon 2 et il a pour abscisse 1.
Il suffit donc de tracer la perpendiculaire à (Ox) contenant le point $(1\,;\,0)$: elle coupe le cercle précédent au point d'ordonnée positive B. Il suffit ensuite de construire le symétrique de B autour de K : D.

3. a. On calcule AC $= |c-a| = |2-2\text{i}) - 2 - 2\text{i}| = |-4\text{i}| = 4$ et BD $= |d-b| = |3-\text{i}\sqrt{3} - 1 - \text{i}| = |2 - 2\text{i}\sqrt{3}| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$.
On a donc KA = KC = KB = KD = 2 : les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre K et de rayon 2.

b. On a démontré que le point K est le milieu de [AC] et de [BD] : le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur : c'est un rectangle.

Figure :



EXERCICE 2 **4 points**

1. $p_1 = 0,15$, $p_2 = 0,25$, $p_3 = 0,15$, $p_4 = 0,35$ et $p_5 = 0,10$.
2. $p(A) = p_1 + p_2 + p_3 = 0,55$.
   $p(B) = p_2 + p_4 = 0,6$.
   $p(A \cap B) = 0,25$.
   $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,55 + 0,60 - 0,25 = 0,9$.
3. **a.** On a le tableau suivant :

numéro	1	2	3	4	5
X	5	−6	5	−6	5
p_i	0,15	0,25	0,15	0,35	0,10

   b. $\text{E}(X) = 5(0,15 + 0,15 + 0,2) - 6(0,25 + 0,45) = -1,60$ (€).

   c. Il suffit de remplaçer dans le calcul précédent 5 par la valeur $a - 6$. D'où :
   $\text{E}(X) = (6 - a) \times (0,15 + 0,15 + 0,2) - 6(0,25 + 0,45) = 0,4a - 6$.
   Le jeu est équitable si l'espérance de gain (et de perte) est nulle.
   Donc $\text{E}(X) = 0 \iff 0,4a - 6 = 0 \iff a = 15$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. g somme de fonctions dérivables sur $]0 ;\ +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :
   $g'(x) = -\dfrac{1}{x} - 2x < 0$ comme somme de deux termes négatifs. La fonction g est donc décroissante sur $]0 ;\ +\infty[$.

2. **a.** $g(1) = 1 - \ln 1 - 1^2 = 1 - 1 = 0$.

   b. g étant strictement décroissante sur $]0~;~+\infty[$ et s'annulant en 1, on en déduit que :
   - $g(x) > 0$ si $0 < x < 1$;
   - $g(1) = 0$;
   - $g(x) < 0$ si $1 < x$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\ln x}{x} = -\infty$, donc finalement : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
   Graphiquement : l'axe des ordonnées est asymptote au graphe de la fonction au voisinage de zéro.

   b. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} -2x = -\infty$, donc finalement $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Soit d la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $d(x) = f(x) - (-2x+4) = \dfrac{2\ln x}{x}$.

   On a vu que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} d(x) = 0$.
   Ceci montre que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x+4$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

   b. Plus précisèment comme $\ln x > 0$ et $x > 0$ au voisinage de plus l'infini on a donc $\dfrac{2\ln x}{x} > 0$, ce qui signifie que la fonction d est positive, ou encore que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite $\mathscr{D}$ au voisinage de $+\infty$.

3. **a.** Le premier terme est un quotient de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle ; f est donc dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x} \times x - 2\ln x}{x^2} - 2 = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2} - 2 = \dfrac{2 - 2\ln x - 2x^2}{x^2} = \dfrac{2\left(1 - \ln x - x^2\right)}{x^2} = \dfrac{2g(x)}{x^2}$.

   b. Comme $2 > 0$ et $x^2 > 0$ sur $]0~;~+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ vu à la partie A.
   On a donc
   - $f'(x) > 0$ si $0 < x < 1$; f est croissante
   - $f'(1) = 0$; f a un maximum ;
   - $f'(x) < 0$ si $1 < x$; f est décroissante.

   c.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$			2		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

4. La droite $\mathscr{D}$ a un coefficient directeur égal à -2. Une tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x est parallèle à $\mathscr{D}$ si son coefficient directeur $f'(x)$ est égal à -2, soit :
   $f'(x) = -2 \iff \dfrac{2\left(1 - \ln x - x^2\right)}{x^2} = -2 \iff 2 - 2\ln x - 2x^2 = -2x^2 \iff 2 - 2\ln x = 0 \iff 1 - \ln x = 0 \iff 1 = x \iff \ln \mathrm{e} = \ln x \iff \mathrm{e} = x$ (d'après la croissance de la fonction ln.
   Vérification : $f'(\mathrm{e}) = \dfrac{2\left(1 - \ln \mathrm{e} - \mathrm{e}^2\right)}{\mathrm{e}^2} = -2$.

5. Voir à la fin.

Partie C : Calcul d'une aire

1. $f(2) = \dfrac{2\ln 2}{2} - 2 \times 2 + 4 = \ln 2$.

Sur $[1~;~2]$ la fonction f est décroissante de 2 à $\ln 2$, donc sur $[1~;~2]$, $f(x) > 0$.

2. **a.** La fonction F est la somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$; elle est donc dérivable sur cet intervalle et :

$F'(x) = 2\ln x \times \dfrac{1}{x} - 2x + 4 = \dfrac{2\ln x}{x} - 2x + 4 = f(x)$.

F est donc une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

b. On a vu que sur $[1~;~2]$, $f(x) > 0$, donc l'aire $\mathscr{A}$ est égale en unités d'aire à l'intégrale :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = (\ln 2)^2 - 2^2 + 4 \times 2 - \left[(\ln 1)^2 - 1^2 + 4 \times 1\right] = (\ln 2)^2 - 4 + 8 + 1 - 4 = 1 + (\ln 2)^2$. D'où $\mathscr{A} \approx 1{,}48045$ (u. a.)

Comme l'unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4$ cm^2, on a $\mathscr{A} \approx 5{,}921 \approx 5{,}92$ (cm^2) au mm^2 près. Ce que l'on vérifie approximativement sur la figure.