Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat STI Polynésie 11 juin 2012 ∾ Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **4 points**

Question 1

On peut dresser le tableau de répartition suivant pour 100 pièces produites :

	Défaut A	pas le défaut A	Total
Défaut B	5	5	10
Pas le défaut B	25	65	90
Total	30	70	100

65 pièces sur 100 ne présentent aucun des deux défauts : réponse B.

Question 2

Son gain est supérieur à zéro si l'une des trois cases 2, 2 ou 3 s'allume, d'où une probabilité de $\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$.
Réponse B. **Question 3**

Si X est la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur le tableau de la loi de probabilité de X est :

x_i	2	1	0	-1
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

L'espérance de X est égale à :
$\text{E}(X)=2\times\frac{1}{9}+1\times\frac{2}{9}+0\times\frac{1}{9}-1\times\frac{5}{9}=\frac{2+2-5}{9}=-\frac{1}{9}$.
Réponse D.

Question 4

Il suffit de remplacer dans le calcul précédent de l'espérance le 0 par $x-1$, x étant le gain obtenu si la case centrale s'allume.
$\text{E}(X)=2\times\frac{1}{9}+1\times\frac{2}{9}+(x-1)\times\frac{1}{9}-1\times\frac{5}{9}=\frac{2+2+x-1-5}{9}=\frac{x-2}{9}$.
Donc $\text{E}(X)=0 \iff x=2$. Réponse B

EXERCICE 2 **5 points**

1. On calcule $\Delta=4-4\times2=-4=(2\text{i})^2$.
$\Delta<0$: l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{2+2\text{i}}{2}=1+\text{i} \quad \text{et} \quad z_2=1-\text{i}.$$

2. **a.** $b=a\times w=(2+\text{i})(1+\text{i})=2-1+2\text{i}+\text{i}=1+3\text{i}$

b. $c=\dfrac{a}{w}=\dfrac{2+\text{i}}{1+\text{i}}=\dfrac{(2+\text{i})(1-\text{i})}{(1+\text{i})(1-\text{i})}=\dfrac{2+1-2\text{i}+\text{i}}{1+1}=\dfrac{3-\text{i}}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\text{i}$.

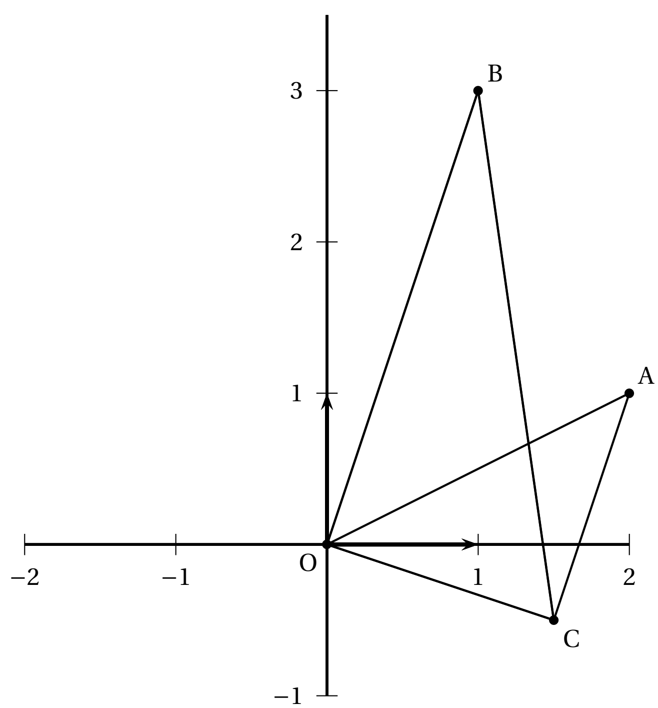
c. On a $|b|^2=1^2+3^2=1+9=10$, donc $|b|=\sqrt{10}$.
$|c|^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{10}{4}$, donc $|c|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

3. **a.** Voir la figure à la fin de l'exercice.

b. On a $\text{BC} = |z_C - z_B| = \left|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\text{i} - 1 - 3\text{i}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{7}{2}\text{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2} =$
$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

c. On $\text{OB}^2 = |b|^2 = 10$ et $\text{OC}^2 = \frac{10}{4}$ (vu plus haut).
Or $\text{OB}^2 + \text{OC}^2 = 10 + \frac{10}{4} = \frac{40}{4} + \frac{10}{4} = \frac{50}{4} = \text{BC}^2$.
$\text{OB}^2 + \text{OC}^2 = \text{BC}^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle BC est rectangle en O.

4. On a $\left(\overrightarrow{\text{OC}}, \overrightarrow{\text{OA}}\right) = \arg\frac{z_A - z_O}{z_C - z_O} = \arg\frac{2+\text{i}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\text{i}} = \arg\frac{4+2\text{i}}{3-\text{i}} = \arg\frac{(4+2\text{i})(3+\text{i})}{(3-\text{i})(3+\text{i})} =$
$\arg\frac{12-2+4\text{i}+6\text{i}}{9+1} = \arg\frac{10+10\text{i}}{10} = \arg(1+\text{i})$.
Or $1+\text{i}$ a pour module $\sqrt{2}$, donc :
$1+\text{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\text{e}^{\frac{\pi}{4}}$.
Donc $\left(\overrightarrow{\text{OC}}, \overrightarrow{\text{OA}}\right) = \frac{\pi}{4}$ et par conséquent $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \frac{\pi}{4}$ (puisque le triangle OBC est rectangle en O) et la droite (OA) est une bissectrice du triangle OBC.
On aurait pu aussi montrer que $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \arg(1+\text{i})$ en faisant un calcul analogue à celui de $\left(\overrightarrow{\text{OC}}, \overrightarrow{\text{OA}}\right)$.
Autre méthode : On peut montrer que OCA est un triangle rectangle isocèle en C avec la réciproque du théorème de Pythagore). Il en résulte que $\widehat{\text{COA}} = 45\,°$... d'où la bissectrice.



PROBLÈME **11 points**

Partie A - Modélisation de la piste

1. Détermination graphique d'une équation de la droite (AB)

a. b est l'ordonnée à l'origine soit $b = 4$. L'équation est donc $y = ax + 4$.

b. $A(-6\,;\,7) \in AB \iff 7 = a \times (-6) + 4 \iff 6a = 4 - 7 \iff 6a = -3 \iff$ $a = -\dfrac{1}{2}$.

L'équation est donc $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$.

2. a. En dérivant le produit, on obtient pour tout réel x :

$f'(x) = \left(\dfrac{1}{4} \times 2x - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}x^2 - x + 2\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\left(\dfrac{1}{2}x - 1 + \dfrac{1}{16}x^2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}\right) =$
$\left(\dfrac{1}{16}x^2 + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = \dfrac{1}{16}\left(x^2 + 4x - 8\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$.

b. Avec $x = 0$, on a $f(0) = 2 + \left(\dfrac{1}{4} \times 0^2 - 0 + 2\right)\mathrm{e}^{\frac{0}{4}} = 2 + 2 = 4$, ce qui montre que B appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Tangente en B : on sait que la tangente en B a pour coefficient directeur le nombre dérivé en 0, soit $f'(0) = \dfrac{1}{16}\left(0^2 + 4 \times 0 - 8\right)\mathrm{e}^{\frac{0}{4}} = \dfrac{1}{16} \times (-8) = -\dfrac{1}{2}$ qui est bien égal au coefficient directeur de la droite (AB).

Partie B - Étude de la fonction f

1. a. $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 16 + 32 = 48 = \left(4\sqrt{3}\right)^2$.

$\Delta > 0$: l'équation a donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-4 + 4\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = -2 - 2\sqrt{3}$$

b. $f'(x) = \dfrac{1}{16}\left(x^2 + 4x - 8\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$.

On sait que $\dfrac{1}{16} > 0$ et que quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} > 0$: le signe de $f'(x)$ est donc celui du trinôme $x^2 + 4x - 8$.

On sait que ce trinôme est positif sauf entre les racines.

Donc sur $\left[0\,;\,-2 + 2\sqrt{3}\right]$, $f'(x) \leqslant 0$: la fonction est décroissante sur cet intervalle ;

Sur $\left[-2 + 2\sqrt{3}\,;\,4\right]$, $f'(x) \geqslant 0$: la fonction est croissante sur cet intervalle.

c. Le minimum de la fonction sur $[0\,;\,4]$ est $f\left(-2 + 2\sqrt{3}\right) =$
$2 + \dfrac{1}{4}\left[\left(-2 + 2\sqrt{3}\right)^2 - \left(-2 + 2\sqrt{3}\right) + 2\right]\mathrm{e}^{\frac{-2+2\sqrt{3}}{4}} \approx 3{,}545 \approx 3{,}5$.

Le maximum de la fonction sur $[0\,;\,4]$ est $f(4) = 2 + \dfrac{1}{4}\left(4^2 - 4 + 2\right)\mathrm{e}^{\frac{4}{4}} = 2 + \dfrac{9}{3}\mathrm{e} \approx 7{,}44 \approx 7{,}4$.

x	0		$2\sqrt{3} - 2$		4
f	4	$\searrow$	$\approx 3{,}5$	$\nearrow$	≈ 7.4

d. Le tableau montre que sur $[0\,;\,4]$ le minimum est environ $3{,}54 > 3{,}5$. Donc pour tout réel de $[0\,;\,4]$, $f(x) > 3{,}5$.

2. a. F est dérivable sur $[0\,;\,4]$ et sur cet intervalle :

$F'(x) = 2 + (2x - 12)\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} + \dfrac{1}{4}\left(x^2 - 12x + 56\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = 2 + \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\left(2x - 12 + \dfrac{1}{4}x^2 - 3x + 14\right) = 2 + \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\left(\dfrac{1}{4}x^2 - x + 2\right) =$
$f(x)$.

Conclusion : F est une primitive de f sur $[0\,;\,4]$.

b. $I = \displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^4 = F(4) - F(0) =$

$2 \times 4 + \left(4^2 - 12 \times 4 + 56\right)\mathrm{e}^{\frac{4}{4}} - \left[2 \times 0 + \left(0^2 - 12 \times 0 + 56\right)\mathrm{e}^{\frac{0}{4}}\right] = 8 + 24\mathrm{e} - 56 = 24\mathrm{e} - 48$

Partie C - Calcul d'une aire plane

1. **a.** ABOE est un trapèze car (OB) et (EA) sont parallèles.

   b. On a donc $\mathcal{S}_1 = \dfrac{\text{OB} + \text{EA}}{2} \times \text{OE} = \dfrac{7+4}{2} \times 6 = 3 \times 11 = 33\ \text{m}^2$.

2. La fonction f étant positive sur $[0\,;\,4]$, l'aire $\mathcal{S}_2$ de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$ l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$ est égale à l'intégrale calculée précédemment soit $\mathcal{S}_2 = 24\mathrm{e} - 48\ \text{m}^2$.

   $\mathcal{S}_2 \approx 17,238 \approx 17,24\ \text{m}^2$ au dm^2 près.

   L'aire totale du profil de la piste est donc égale à :

   $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 \approx 33 + 17,24 \approx 50,24\ \text{m}^2$ au dm^2 près.