Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Polynésie 14 septembre 2012 Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

1. $\Delta = 4\times 3 - 4\times 4 = -4 = (2\text{i})^2$. Le discriminant est négatif, l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{2\sqrt{3}+2\text{i}}{2} = \sqrt{3}+\text{i}$ et $\sqrt{3}+\text{i}$. Réponse **c.**
2. On a $|z_{\text{A}}|^2 = \left|\sqrt{3}-\text{i}\right|^2 = 3+1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_{\text{A}}| = 2$.
   On a donc $z_{\text{A}} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \text{i}\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{-1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{-\pi}{6}\right)$.
   Réponse **d.**
3. $\left|z-\sqrt{3}-\text{i}\right| = \left|z-\sqrt{3}+\text{i}\right| \iff \left|z-\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)\right| = \left|z-\left(\sqrt{3}-\text{i}\right)\right| \iff |z-z_{\text{B}}| = |z-z_{\text{A}}| \iff$ BM = AM. Les points de l'ensemble sont donc équidistants de A et de B.
   L'ensemble est donc la médiatrice de [AB], mais comme A et B sont symétriques autour de l'axe des abscisses, cette médiatrice est l'axe des abscisses : réponse **b.**
4. Calculons $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}} = \dfrac{\sqrt{3}+\text{i}}{\sqrt{3}-\text{i}} = \dfrac{\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)}{\left(\sqrt{3}-\text{i}\right)\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)} = \dfrac{3-1+2\text{i}\sqrt{3}}{3+1} = \dfrac{1-\text{i}\sqrt{3}}{2}$.
   Réponse : **d.**
5. DEAC est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{\text{DE}} = \overrightarrow{\text{CA}} \iff z_{\text{E}} - z_{\text{D}} = z_{\text{A}} - z_{\text{C}} \iff z_{\text{E}} = z_{\text{D}} + z_{\text{A}} - z_{\text{C}} = -\sqrt{3}-\text{i}+\sqrt{3}-\text{i}+\sqrt{3}-\text{i} = \sqrt{3}-3\text{i}$. Réponse : **c.**

EXERCICE 2 **4 points**

1. L'équation est de la forme $q'' + \omega^q = 0$, avec $\omega = 11\times 10^3$.
   Une solution est de la forme : $q(t) = A\cos\left(11\times 10^3\right)t + B\sin\left(11\times 10^3\right)t$, avec A et B réels quelconques.
2. q est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $q'(t) = -11\times 10^3 A\sin\left(11\times 10^3\right)t + 11\times 10^3 B\cos\left(11\times 10^3\right)t$.
   Donc $\left\{\begin{array}{lcl} q(0) &=& 2\times 10^{-6}\\ q'(0) &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A &=& 2\times 10^{-6}\\ 11\times 10^3 B &=& 0\end{array}\right. \iff$
   $\left\{\begin{array}{lcl} A &=& 2\times 10^{-6}\\ B &=& 0\end{array}\right.$
   La solution particulière est donc
   $$q(t) = 2\times 10^{-6}\cos\left(11\times 10^3\right)t.$$
3. $q'(t) = i(t) = -2\times 10^{-6}\times 11\times 10^3 \sin\left(11\times 10^3\right)t = 22\times 10^{-3}\sin\left(11\times 10^3\right)t = 2,2\times 10^{-2}\sin\left(11\times 10^3\right)t$.
4. La valeur moyenne de la fonction q sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi\times 10^{-3}}{2\times 11}\right]$ est donc égale à :
   $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi\times 10^{-3}}{2\times 11}} q(t)\,\text{d}t = \int_0^{\frac{\pi\times 10^{-3}}{2\times 11}} 2\times 10^{-6}\cos\left(11\times 10^3\right)t\,\text{d}t =$
   $\left[\dfrac{1}{11\times 10^3}\times 2\times 10^{-6}\sin\left(11\times 10^3\right)t\right]_0^{\frac{\pi\times 10^{-3}}{2\times 11}} =$
   $\dfrac{2\times 10^{-6}}{11\times 10^3}\left[\sin\left(11\times 10^3\right)t\right]_0^{\frac{\pi\times 10^{-3}}{2\times 11}} = \dfrac{2}{11}\times 10^{-9}\sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2}{11}\times 10^{-9}$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

1. **a.** Sur $]0~;~+\infty[$, toutes les fonctions sont dérivables et sur cet intervalle :
   $g'(x) = -3\dfrac{1}{x} + 3x^2 = 3\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right) = 3\left(\dfrac{x^3-1}{x}\right)$.
   Or $x^3 - 1$ s'annule pour $x = 1$: on peut donc écrire :
   $x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + bx + c\right)$, soit :
   $x^3 - 1 = x^3 + bx^2 + cx - x^2 - bx - c = x^3 + x^2(b-1) + x(c-b) - c$.
   En identifiant les deux écritures : $b - 1 = 0 \iff b = 1$; $-c = -1 \iff c = 1$.
   Donc $x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$.
   Finalement : $g'(x) = \dfrac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$.

   b. Le trinôme $x^2 + x + 1$ a un discriminant ($\Delta = 1 - 4 = -3$ négatif il est donc du signe du coefficient de x^2 donc positif pour tout réel ; comme $x > 0$ il en résulte que le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$.
   Donc si $x > 1$, $g'(x) > 0$;
   si $\mathrm{x} = 1$, $\mathrm{g}'(x) < 0$.

   c. On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

2. $g(1) = 3 - 3\ln 1 + 1^3 = 3 + 1 = 4$.
3. D'après le tableau de variations le minimum de la fonction g sur $]0~;~+\infty[$ est égal à 4, donc $g(x) \geqslant 4 > 0$ sur $]0~;~+\infty[$.

Partie B : étude d'une fonction

1. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   b. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
2. **a.** $f'(x) = 3\dfrac{\frac{1}{x}\times x - 1\times\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2}\times 2x = \dfrac{3 - 3\ln x}{x^2} + x = \dfrac{3 - 3\ln x + x^3}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b. On a vu à la question **A 3.** que $g(x) > 0$ sur $]0~;~+\infty[$, donc sur cet intervalle $f'(x) > 0$.

   c. Le résultat précédent montre que f est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini.
3. **a.** Le résultat précédent montre que sur l'intervalle $[0,5~;~1]$, f est strictement croissante de
   $f(0,5) = \dfrac{3\ln 0,5}{0,5 + \dfrac{1}{2}0,5^2 + 1} \approx -3 < 0$ à
   $f(1) = \dfrac{3\ln 1}{1} + \dfrac{1}{2}1^2 + 1 = \dfrac{1}{2}1 + 1 = \dfrac{3}{2} > 0$.
   Il existe donc un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$, α étant l'abscisse du point unique où la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses.
   La calculatrice donne successivement : $0,5 < \alpha < 1$;
   $0,7 < \alpha < 0,8$;
   $0,73 < \alpha < 0,74$.

4. Soit d la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $d(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}x^2+1\right) = 3\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}x^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}x^2+1\right) = 3\frac{\ln x}{x}$.
Comme $x > 0$, le signe de $d(x)$ est celui de $\ln x$. On sait que $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$ et $0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$.
Sur $]0~;1[$, $d(x) < 0$ ce qui signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est sous la parabole $\mathscr{P}$.
Sur $]1~;~+\infty[$, $d(x) > 0$: la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la parabole $\mathscr{P}$.
Pour $x = 1$ les deux courbes ont en commun le point $\left(1~;~\frac{3}{2}\right)$.
5. Voir la figure

Partie C : calcul d'une aire

1. Voir la figure à la fin.
2. h est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$h'(x) = \frac{1}{2} \times 2\ln x \times \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$.
3. Donc h est une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$.
Une primitive de la fonction $x \longmapsto 3\frac{\ln x}{x}$ est donc $\frac{3}{2}(\ln x)^2$.
On a vu que pour $x > 1$, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la parabole, donc l'aire de la surface hachurée est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x) - \left(\frac{1}{2}x^2+1\right)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 3\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{3}{2}(\ln \mathrm{e})^2 - \frac{3}{2}(1)^2 = \frac{3}{2} = 1,5$ unité d'aire.

Annexe (problème)
à rendre avec la copie