Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Antilles-Guyane 20 juin 2012 Génie mécanique (options A et F), Génie civil, Génie énergétique

EXERCICE 1 **5 points**

1. Voir l'annexe à la fin.
2. **a.** D'après le tableau $p_1 = \dfrac{7\,700}{10\,000} = \dfrac{77}{100} = 0,77 = 77\,\%$.

   b. D'après le tableau $p_2 = \dfrac{800 + 1\,300}{10000} = \dfrac{2\,100}{10\,000} = \dfrac{21}{100} = 0,21 = 21\,\%$
3. **a.** On vient de voir que 2 100 pièces présentent un seul défaut.
   80 % d'entre elles sont vendues 12 €, soit $0,80 \times 2\,100 = 1\,680$.
   Sur 10 000 pièces, 1 680 sont vendues 12 €.

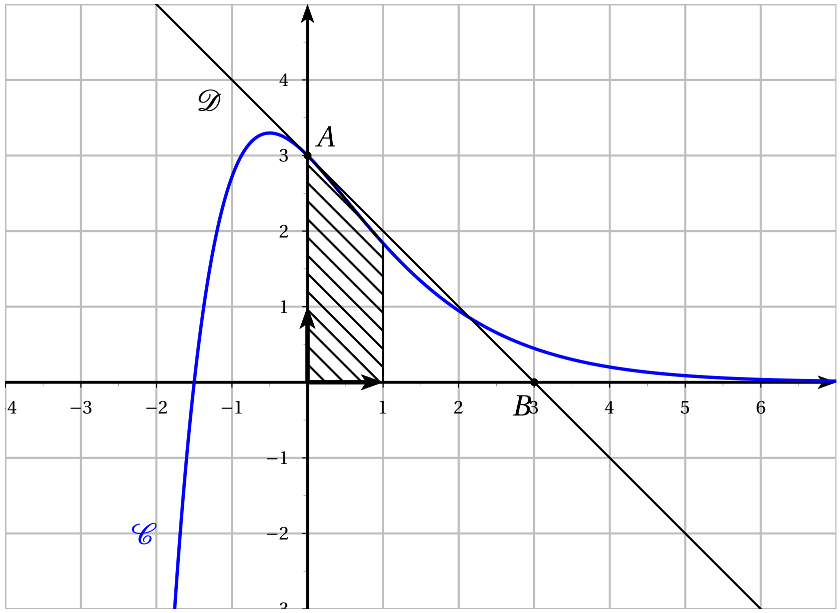
   b. Les 7 700 pièces ne présentant aucun défaut coûtent 10 € et sont vendues 20 € : elles procurent un bénéfice de $7\,700 \times 10 = 77\,000$ €.
   Pour les 2 100 pièces présentant un seul défaut :
   - 1 680 sont vendues 12 € et procurent donc un bénéfice de
   $1\,680 \times (12 - 10) = 1\,680 \times 2 = 3\,360$ € ;
   - les $2\,100 - 1\,680 = 420$ restantes ne sont pas vendues et procurent une perte de $420 \times 10 = 4\,200$ €.
   Enfin les 200 pièces présentant les deux défauts procurent une perte de $200 \times 10 = 2\,000$ €.
   Pour 10 000 pièces produites l'entreprise peut espérer un bénéfice de :
   $77\,000 + 3\,360 - 4\,200 - 2\,000 = 80\,360 - 6\,200 = 74\,160$ €.

EXERCICE 2 **5 points**

1. Réponse c.
2. Avec $z \neq -1$, on a $\dfrac{z-1}{z+1} = \mathrm{i} \iff z - 1 = \mathrm{i}(z+1) \iff z(1-\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i} \iff z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \iff$
   $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} \iff z = \dfrac{1-1+2\mathrm{i}}{1+1} \iff z = \mathrm{i}$.
   Réponse a.
3. On a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$; donc :
   $z = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2\mathrm{i}$.
   Réponse a.
4. $z = 4 \times (-\mathrm{i}) = 4 \times \mathrm{e}^{\frac{-\pi}{2}}$.
   Réponse c.
5. On a $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i} = \cos\frac{-\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{6} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
   Réponse b.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : lectures graphiques



1. **a.** On lit $f(0) = 3$.

   b. On a $f(0) = b\mathrm{e}^{-0} = b = 3$.

2. **a.** Le repère est orthonormal , donc le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$ est égal à :

   $f'(0) = \dfrac{-3}{3} = -1$

   b. En appliquant la règle sur la dérivée d'un produit :

   $f'(x) = a\mathrm{e}^{-x} + (-1) \times (ax + b)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(a - ax - b) = \mathrm{e}^{-x}(a - 3 - ax)$.

   On a vu que $f'(0) = -1$, soit :

   $\mathrm{e}^{-0}(a-3) = -1 \iff a - 3 = -1 \iff a = 2$.

   On a donc quel que soit le réel s, $\quad f(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B : étude d'une fonction et calcul intégral

1. **a.** On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (2x+3) = -\infty$, d'où par produit de limites :

   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

   b. On peut écrire en développant :

   $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-x}$.

   On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   Géométriquement ce résultat signifie que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

2. **a.** On a vu que $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(a - 3 - ax) = (-2x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. On sait que quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc le signe de f' est celui du facteur $(-2x-1)$.

   $-2x - 1 > 0 \iff -1 > 2x \iff -\dfrac{1}{2} > x$;

   de même $-2x - 1 < 0 \iff -1 < 2x \iff -\dfrac{1}{2} < x$.

   c. Les résultats précédents montrent que :

   - f est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$;

   - f est décroissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$. (ce qui correspond bien à la courbe donnée).

De plus $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

3. a. Calculons : $-f'(x) + 2\mathrm{e}^{-x} = -(-2x-1)\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} = 2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} = 2x\mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-x} = (2x+3)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.

b. Une primitive de $-f'(x)$ est $-f(x)$;

Une primitive de $2\mathrm{e}^{-x}$ est $-2\mathrm{e}^{-x}$.

Donc par somme : une primitive de $-f'(x) + 2\mathrm{e}^{-x}$ (donc de $f(x)$) est $F(x) = -f(x) - 2\mathrm{e}^{-x} = -(2x+3)\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} = -2x\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} = -2x\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{-x} = F(x) = (-2x-5)\mathrm{e}^{-x}$.

4. a. D'après la question précédente :

$I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = \left((-2\times 1 - 5)\mathrm{e}^{-1}\right) - \left((-2\times 0 - 5)\mathrm{e}^{-0}\right) = -7\mathrm{e}^{-1} + 5 = 5 - 7\mathrm{e}^{-1}$.

La calculatrice donne : $I \approx 2,4248 \approx 2,425$ à 10^{-3} près.

b. On a $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 2x \leqslant 2 \Rightarrow 3 \leqslant 2x+3 \leqslant 5$. Donc sur $[0\,;\,1]$, $2x+3 > 0$ et comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout réel x, $f(x) > 0$ sur $[0\,;\,1]$.

c. On vient de voir que sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, la fonction f est positive, donc I est la mesure en unités d'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On vérifie sur la figure que I vaut à peu près deux unités et demie.

Annexe de l'exercice 1

(à rendre avec la copie)

	Nombre de pièces présentant le défaut A	Nombre de pièces ne présentant pas le défaut A	Total
Nombre de pièces présentant le défaut B	200	1 300	1 500
Nombre de pièces ne présentant pas le défaut B	800	7 700	8 500
Total	1 000	9 000	10 000