Durée : 4 heures

∾ Corrigé du baccalauréat STI Métropole 14 septembre 2012 ∾ Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

1. On a $\Delta = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 4 = 12 - 16 = -4 = (2\text{i})^2 < 0$.
L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \dfrac{-2\sqrt{3} + 2\text{i}}{2} = -\sqrt{3} + \text{i} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{3} - \text{i}.$$

2. a. $|z_\text{A}|^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_\text{A}| = 2$.
On a donc $z_\text{A} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.
Un argument de z_A est donc $\frac{5\pi}{6}$.
Comme $z_\text{B} = \overline{z_\text{A}}$, $|z_\text{A}| = 2$ et un argument de z_B est donc $-\frac{5\pi}{6}$.

b. $z_\text{A} == 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$.

c. A et B appartiennent au cercle centré en O de rayon 2 ; A et B se placent avec leurs ordonnées, respectivement $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Voir la figure à la fin.

d. On sait que $|z_\text{A}| = |z_\text{B}| = \text{OA} = \text{OB} = 2$, donc le triangle OAB est isocèle en O.
D'autre part $\widehat{\text{AOB}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.
L'angle au sommet valant $\frac{\pi}{3}$, les deux angles à la base ont également pour mesure $\frac{\pi}{3}$: OAB a ses trois angles de même mesure : il est équilatéral.

3. a. Dans $\mathbb{C}$, $2z - 4\text{i} = \text{i}z + 2 \iff z(2 - \text{i}) = 2 + 4\text{i} \iff z = \dfrac{2 + 4\text{i}}{2 - \text{i}} \iff$
$z = \dfrac{(2 + 4\text{i})(2 + \text{i})}{(2 - \text{i})(2 + \text{i})} \iff z = \dfrac{4 + 2\text{i} + 8\text{i} - 4}{4 + 1} \iff z = \dfrac{10\text{i}}{5} = 2\text{i}$.
Le nombre complexe 2i est la seule solution de cette équation.

b. Voir la figure

c. $\overrightarrow{\text{BO}}$ a pour affixe $z_\text{O} - z_\text{B} = \sqrt{3} + \text{i}$;
$\overrightarrow{\text{AC}}$ a pour affixe $z_\text{C} - z_\text{A} = 2\text{i} + \sqrt{3} - \text{i} = \sqrt{3} + \text{i}$
Donc $\overrightarrow{\text{BO}} = \overrightarrow{\text{AC}} \iff$ OBAC est un parallélogramme, mais on a vu que OB = BA = 2.
OBAC est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un losange.

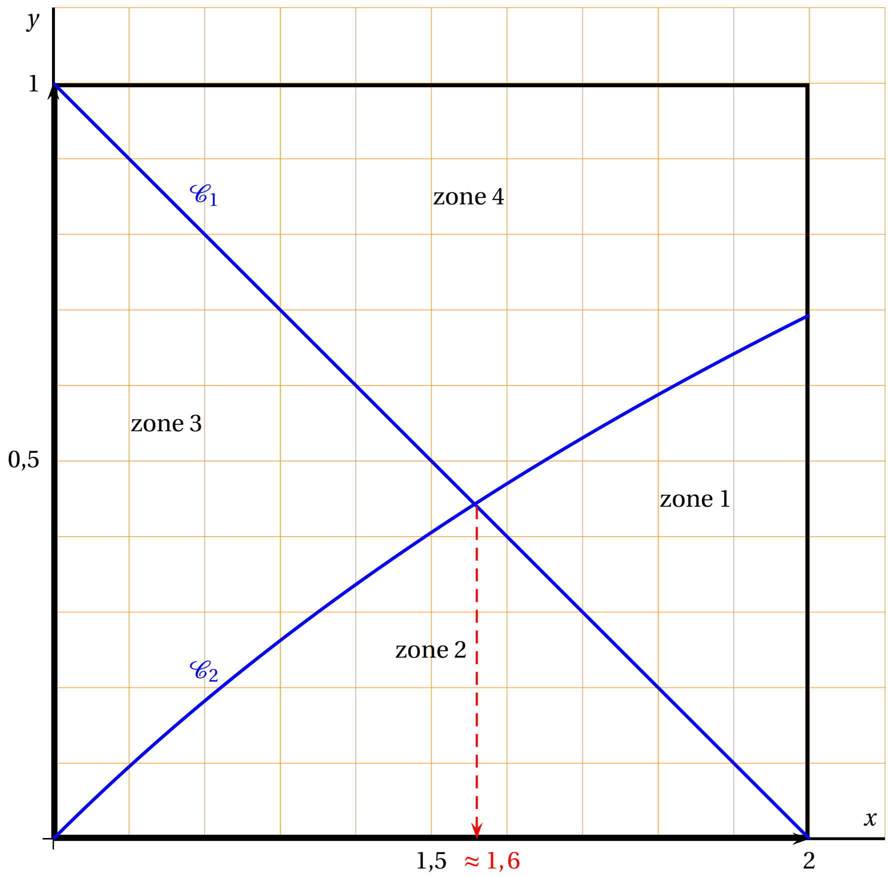
EXERCICE 2 **4 points**

1. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies par :
$t \longmapsto A\cos 2t + B\sin 2t$, $A, B \in \mathbb{R}$. Donc réponse **d.**

2. Si r est la raison : $u_2 = u_1 + r$, $u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r$.
Or $\text{u}_3 == u_{1+2r} \iff 8 = 2 + 2r \iff 2r = 6 \iff r = 3$. Réponse **b.**

$f'(x) = \text{e}^x + x\text{e}^x = \text{e}^x(1 + x)$: réponse **b.**

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est égal au nombre dérivé $f'(1)$.
Or $f'(x) = 3 \times (-1)\text{e}^{1-x} = -3\text{e}^{1-x} \Rightarrow f'(1) = -3 \times 1 = -3$.
De plus $f(1) = 3$.
Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est
$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \iff y - 3 = -3(x - 1) \iff y = 3 - 3x + 3 \iff y = -3x + 6$: réponse **c.**



PROBLÈME **11 points**

Partie A : Étude de fonction

1. On sait que la fonction ln est croissante en particulier sur $[1\,;\,2]$: sa représentation ne peut être que la courbe $\mathscr{C}_2$. Donc $\mathscr{C}_1$ est la représentation de la fonction g.
2. On lit (voir le graphe) environ 1,6.
3. **a.** On a $h'(x) = g'(x) - f'(x) = -1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1-x}{x}$.

   b. Comme $x > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui du numérateur $-1-x$.
   $-1-x > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$; or ici $1 \leqslant x \leqslant 2$;
   $-1-x < 0 \iff -1 < x \iff x > -1$: donc la dérivée est négative sur $[1\,;\,2]$: la fonction h est décroissante sur cet intervalle. On a donc le tableau suivant :

x	1	2
$h(x)$	1 ↘	$-\ln 2$

   c. h est strictement décroissante sur $[1\,;\,2]$; de plus $h(1) = 1 > 0$ et
   $h(2) = -\ln 2 < 0$.

Il existe donc un unique réel $\alpha \in [1~;~2]$ tel que $h(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne $h(1,5) \approx 0,09$ et $h(1,6) \approx -0,07$ donc $1,5 < \alpha < 1,6$, puis $h(1,55) \approx 0,011$ et $h(1,56) \approx -0,005$, donc $1,55 < \alpha < 1,56$.

4. D'après le résultat précédent :

- $h(x) > 0$ sur $[1~;~\alpha]$: géométriquement cela signifie que $\mathscr{C}_1$ est au dessus de $\mathscr{C}_2$ sur l'intervalle $[1~;~\alpha]$;
- $h(x) < 0$ sur $[\alpha~;~2]$: géométriquement cela signifie que $\mathscr{C}_2$ est au dessus de $\mathscr{C}_1$ sur l'intervalle $[\alpha~;~2]$.

Partie B : Calculs d'aires

1. **a.** H est dérivable sur $[1 ; 2]$ et sur cet intervalle :
$H'(x) = 3-2x\times\dfrac{1}{2}-\ln x - x\times\dfrac{1}{x} = 3-x-\ln x-1 = 2-x-\ln x = h(x)$: H est donc une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

b. D'après le résultat précédent :
$\displaystyle\int_1^{\alpha} h(x)\,\mathrm{d}x = [H(x)]_1^{\alpha} = H(\alpha) - H(1) = 3\alpha - \dfrac{\alpha^2}{2} - \alpha\ln(\alpha) - \left[3\times 1 - \dfrac{1^2}{2} - 1\ln(1)\right] = 3\alpha - \dfrac{\alpha^2}{2} - \alpha\ln(\alpha) - 3 + \dfrac{1}{2} = 3\alpha - \dfrac{\alpha^2}{2} - \alpha\ln(\alpha) - \dfrac{5}{2}$.

c. En prenant comme valeur approchée de α, 1,56, on a
$\displaystyle\int_1^{\alpha} h(x)\,\mathrm{d}x \approx 3\times 1,56 - \dfrac{1,56^2}{2} - 1,56\ln(1,26) - \dfrac{5}{2} \approx 0,269$ unité d'aire.
On a vu que sur l'intervalle $[1~;~\alpha]$, le fonction $h = g - f$ est positive, donc que $\mathscr{C}_1$ est au dessus de $\mathscr{C}_1$ et que par conséquent l'intégrale de h sur l'intervalle $[1~;~\alpha]$ est égale en unité d'aire à la mesure de la surface comprise entre les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Comme l'unité est égale à 10 cm, l'unité d'aire est égale à 100 cm^2. Finalement :
$\mathscr{A}_2 \approx 0,269\times 100 \approx 26,9$ cm^2 ou 27 cm^2 au cm^2 près.

2. On a de façon évidente : $\mathscr{A}_3+\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 (2-x)\mathrm{d}x = \left[2x - \dfrac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2\times2-\dfrac{2^2}{2}-\left[2\times 1 - \dfrac{1^2}{2}\right] = 4-2-2+\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. (c'est de façon aussi simple l'aire d'un triangle rectangle isocèle de côté 1)
Donc
$\mathscr{A}_2 = (\mathscr{A}_3+\mathscr{A}_2) - \mathscr{A}_3 = \dfrac{1}{2} - \left[3\alpha - \dfrac{\alpha^2}{2} - \alpha\ln(\alpha) - \dfrac{5}{2}\right] = 3 - 3\alpha + \dfrac{\alpha^2}{2} + \alpha\ln\alpha \approx 0,231$ u.a soit environ 23,4 cm^2 donc 23 cm^2 au cm^2 près.

Partie C : Probabilités

1. La probabilité est égale à $P_0 = 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5} = 0,2$.

2.

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
probabilité	0,200	0,128	0,184	0,216	0,272
X	0	10	5	2	1

On a :
$\dfrac{16}{0,128} = 125$; $\dfrac{23}{0,184} = 125$; $\dfrac{27}{0,216} = 125$; $\dfrac{34}{0,272} = 125$.
Les probabilités sont bien proportionnelles aux aires des quatre zones.

3. **a.** Voir le tableau au dessus

b. La probabilité est égale à :
$p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = 0,200 + 0,272 + 0,216 = 0,688$.

c. $\text{E}(X) = 0\times 0,200+10\times 0,128+5\times 0,184+2\times 0,216+1\times 0,272 = 1,28+0,92+0,432+0,272 = 2,904$. Sur un grand nombre de lancers un lancer rapportera un peu moins de 3 points.

d. En moyenne un lancer rapporte 2,904 points, donc n lancers rapportent $2,904n$ points. Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation :

$2{,}904\text{n} \geqslant 100 \iff n \geqslant \dfrac{100}{2,904}$.

Or $\dfrac{100}{2,904} \approx 34,4$.

Il faut donc faire au moins 35 lancers, pour espérer atteindre les 100 points.