# Corrigé du baccalauréat STI Nouvelle Calédonie novembre 2009
# Génie électronique, électrotechnique et optique

**EXERCICE 1** **4 points**

**Partie I**

On a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 12 = 36 - 48 = -12 = \left(2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$.
Il y a donc deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{6+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 3+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = 3-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

**Partie II**

1. Module : $|z_A|^2 = 3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 9+3 = 12 = \left(2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow |z_A| = 2\sqrt{3}$.
   On peut donc écrire en factorisant le module :
   $z_A = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Un argument de $z_A$ est donc $\dfrac{\pi}{6}$.

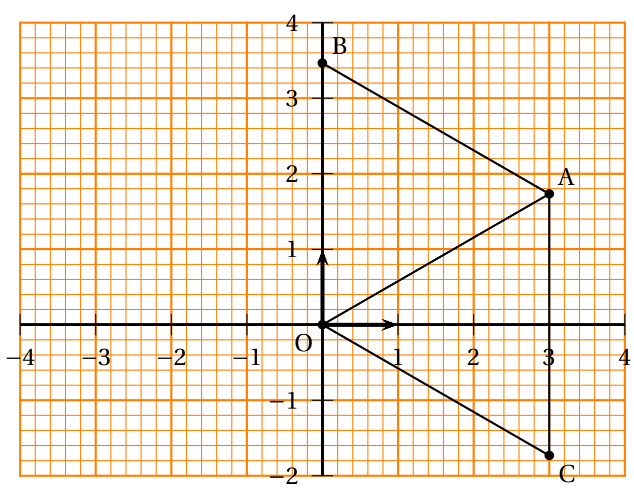
2. **a.** On reconnaît une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   **b.** On a donc $z_B = z_A\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right) = z_A\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(3+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
   $\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Voir la figure plus bas.

   **c.** Par définition de la rotation OA = OB et $\widehat{\text{OAB}} = 60$ °.
   Le triangle OAB est donc isocèle avec un angle au sommet de 60 ° : il est donc équilatéral.

3. **a.** Par définition de $T$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{w} \Rightarrow z_{\overrightarrow{AC}} = z_{\overrightarrow{w}} \iff z_C - z_A = z_{\overrightarrow{w}} \iff$
   $z_C = z_A + z_{\overrightarrow{w}} = 3+\mathrm{i}\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\mathrm{i} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Voir la figure

   **b.** On remarque que $z_B = z_{\overrightarrow{w}} = 2\mathrm{i}\sqrt{3}$, donc $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AC} \iff$ OCAB est un parallélogramme.
   D'autre part $z_C = z_2 = \overline{z_1}$ (voir la partie I), donc OC $= |z_1| = 2\sqrt{3}$ (voir Partie II, 1.).
   Or par définition de la translation AC $= 2\sqrt{3}$.
   Conclusion : le parallélogramme OCAB a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un losange, mais pas un carré car $\widehat{\text{COB}} = 30 + 90 = 120$ °.



**EXERCICE 2** **5 points**

1. Cette équation différentielle est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 2$.
   On sait que les solutions sont de la forme $y = A\cos 2x + B\sin 2x$, $A, B \in \mathbb{R}$.
2. Si $y = A\cos 2x + B\sin 2x$, $y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$.
   On a donc $\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & \dfrac{1}{4} \\ f'(0) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & \dfrac{1}{4} \\ 2B & = & 0 \end{array}\right.$
   La seule solution est donc $f(x) = \dfrac{1}{4}\cos 2x$.
3. $g(x) = 3\sin x \Rightarrow g'(x) = 3\cos x \Rightarrow g''(x) = -3\sin x$.
   Donc $g''(x) + g(x) = -3\sin x + 3\sin x = 0$.
4. $h'(x) = 3\cos x - 2 \times \dfrac{1}{4}\sin 2x = 3\cos x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$
5. **a.** $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3\sin\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{4}\cos\pi = 3 + \dfrac{1}{4} \times (-1) = 3 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{4}$.

   **b.** La valeur moyenne de la fonction $h$ sur l'intervalle $[0~;~\pi]$ est égale à :
   $\dfrac{1}{\pi - 0}\displaystyle\int_0^{\pi} h(x)\,\text{d}x = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(3\sin x + \dfrac{1}{4}\cos 2x\right)\text{d}x = \left[-3\cos x + \dfrac{1}{8}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \dfrac{1}{\pi}[-3\times(-1) + 0 - (-3+0)] = \dfrac{6}{\pi}$.

   **c.** Le tracé de la courbe représentative de $h$ à la calculatrice montre que celui-ci coupe l'axe des abscisses en deux points sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$ : il y a donc deux solutions.

**PROBLÈME** **11 points**

**Partie I Exploitation graphique de la courbe $\mathcal{C}$**

1. On voit que sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{7}{2}\right]$, la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en 0 et au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$. L'équation a donc deux solutions sur cet intervalle.
2. Toujours graphiquement on voit que :
   - $f(x) > 0$ sur $\left]-\dfrac{1}{2}~;~0\right[$ et sur $\left]\dfrac{3}{2}~;~\dfrac{7}{2}\right[$;
   - $f(x) < 0$ sur $\left]0~;~\dfrac{3}{2}\right[$;
   - $f(0) = 0$ et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$.
3. Au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$, la tangente est horizontale, donc $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$. De même $f'(3) = 0$.
4. La droite $\Delta$ contient les points O$(0 ; 0)$ et B$(-1~;~3)$. une équation de $\Delta$ est donc de la forme $y = \alpha x$ et B$(-1~;~3) \in \Delta \iff 3 = \alpha \times (-1) \iff \alpha = -3$.
   Une équation de la tangente $\Delta$ est donc $y = -3x$.
5. La fonction est croissante à partir de $\dfrac{1}{2}$, donc les solutions sont tous les réels de $\left]\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{7}{2}\right]$.

**Partie II Étude de la fonction $f$**

1. On a $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} 2x^2 - 3x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. On peut écrire $f(x) = 2x^2\text{e}^{-x} - 3x\text{e}^{-x} = \dfrac{2x^2}{\text{e}^x} - \dfrac{3x}{\text{e}^x}$.

   Or on sait que pour $n \in n\mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\text{e}^x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   On en déduit que géométriquement l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.

3. $f'(x) = (4x-3)\text{e}^{-x} - \left(2x^2 - 3x\right)\text{e}^{-x} = \left(-2x^2 + 7x - 3\right)\text{e}^{-x}$.

4. On sait que $\text{e}^{-x} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$ ; le signe de $f'(x)$ est donc celui du trinôme $-2x^2 + 7x - 3$.

   Donc $f'(x) = 0 \iff -2x^2 + 7x - 3 = 0$.

   $\Delta = 49 - 4 \times (-2) \times (-3) = 49 - 24 = 25 = 5^2$ ; il y a donc deux solutions réelles :

   $$x_1 = \frac{-7+5}{-4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7-5}{-4} = \frac{12}{4} = 3.$$

   Ceci correspond bien aux deux points où la tangente est horizontale.

   $f'(x)$ est donc positive, c'est-à-dire que la fonction est croissante sauf entre les racines où elle est décroissante. Ceci correspond également à la figure donnée.

5. On a $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(2 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \dfrac{3}{2}\right)\text{e}^{-\frac{3}{2}} = 0$.

   D'autre part $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(-2 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 7 \times \dfrac{3}{2} - 3\right)\text{e}^{-\frac{3}{2}} = 3\text{e}^{-\frac{3}{2}}$.

   Une équation de la tangente est donc :

   $y - 0 = 3\text{e}^{-\frac{3}{2}}\left(x - \dfrac{3}{2}\right) \iff y = 3\text{e}^{-\frac{3}{2}}x - \dfrac{9}{2}\text{e}^{-\frac{3}{2}}$.

**Partie III Calcul d'aire**

1. $f(2) = (2 \times 4 - 3 \times 2)\text{e}^{-2} = 2\text{e}^{-2} > 0$.

   Comme la fonction $f$ est croissante sur $[2 ; 3]$, la fonction $f$ est donc positive sur cet intervalle.

2. On a $F'(x) = (-4x-1)\text{e}^{-x} - \left(-2x^2 - x - 1\right)\text{e}^{-x} = \left(-2x^2 - 3x\right)\text{e}^{-x} = f(x)$.

   $F$ est donc une primitive de la fonction $f$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

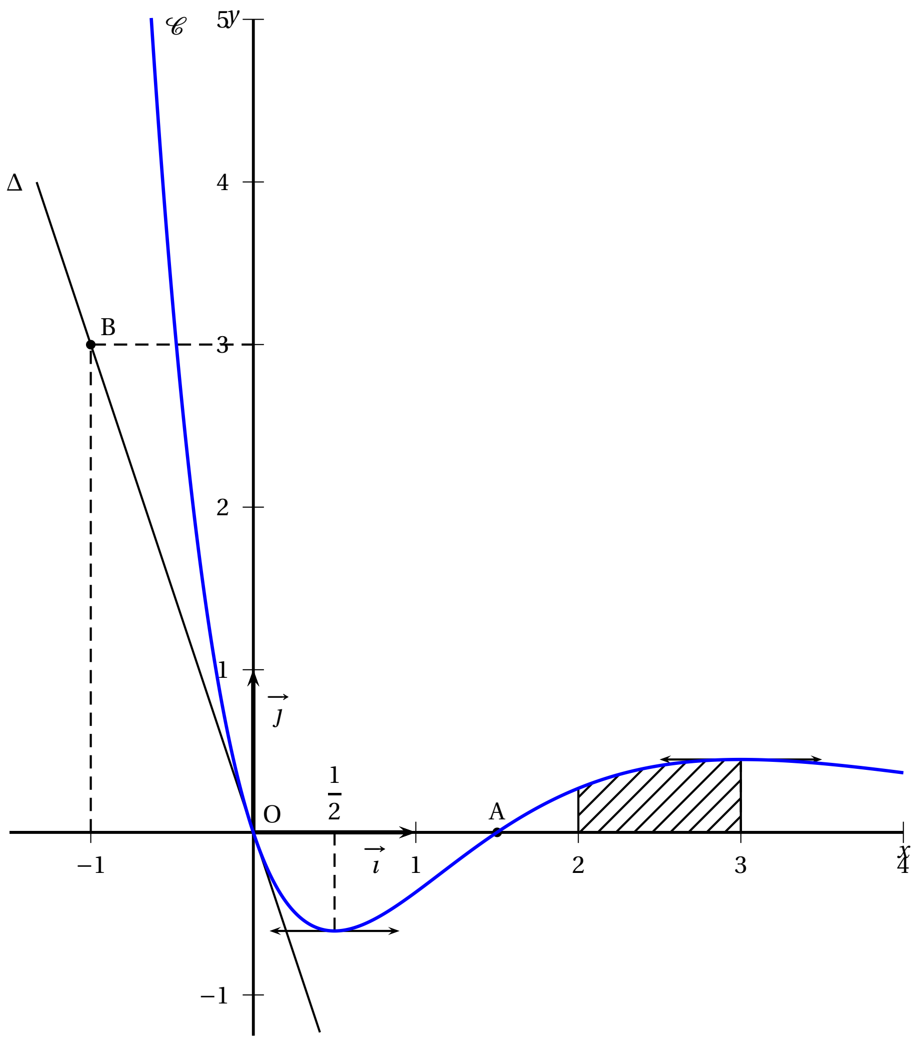
3. **a.** Voir la figure

   **b.** La fonction $f$ étant positive sur $[2 ; 3]$, on sait que l'aire (en unités d'aire) de la surface $\mathcal{D}$ est égale à :

   $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\text{d}x = \left[\left(-2x^2 - x - 1\right)\text{e}^{-x}\right]_2^3 =$

   $\left[\left(-2 \times 3^2 - 3 - 1\right)\text{e}^{-3}\right] - \left[\left(-2 \times 2^2 - 2 - 1\right)\text{e}^{-2}\right] =$

   $-22\text{e}^{-3} + 11\text{e}^{-2} = 11\text{e}^{-2}\left(1 - 2\text{e}^{-1}\right) \approx 0,393 \approx 0,39$ (u. a.).



$\mathscr{C}$
$y$
5
4
3
2
1
$-1$
$\Delta$
B
O
A
$\frac{1}{2}$
$\vec{\imath}$
$\vec{\jmath}$
$-1$
1
2
3
4
$x$