Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Antilles-Guyane 20 juin 2012
Génie électronique, électrotechnique & optique

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** $z_B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z_A$ signifie que
« Le point B est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ ».

   b. Par définition de la rotation de centre O : OA = OB, donc OAB est un triangle isocèle en O.

2. **a.** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$

   b. De $z_B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z_A$ on déduit que $z_B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + 3\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{2} =$
$\dfrac{\left(3\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\left(3\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)}{2}$.

3. **a.** On a $|z_A|^2 = 3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 3 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$. Donc $|z_A| = 2\sqrt{3}$.
On peut donc écrire $z_A = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] =$
$2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   b. Donc $z_B = z_A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{12}}$.

4. En identifiant les deux écritures trouvées au 2. b et 3. b. pour z_B, on en déduit respectivement pour les parties réelles et imaginaires que :
$2\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\left(3\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)}{2}$ c'est-à-dire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\left(3\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)}{4\sqrt{3}}$.
De même (non demandé) : $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\left(3\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)}{4\sqrt{3}}$.

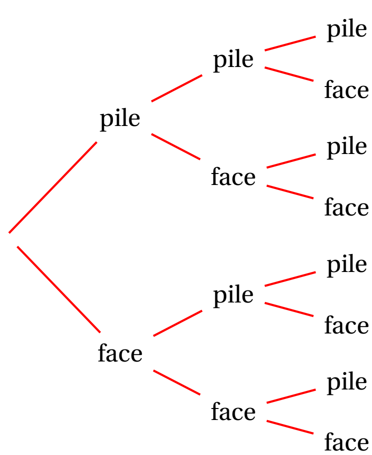
EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** Seule l'issue pile-pile permet de gagner ; la probabilité de gagner est donc égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$.

   b. De même l'issue face-face a une probabilité égale à $\frac{1}{4}$, donc
$p(\mathrm{A}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

   c. $\overline{\mathrm{B}}$: « le résultat face n'a pas été obtenu »ou « le résultat pile-pile a été obtenu. Comme ce dernier évènement a une probabilité de $\frac{1}{4}$, on a
$p(\mathrm{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

2. a.



b. La probabilité de tirer pile-pile-pile donc de gagner 100 € est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. La probabilité de perdre un euro est donc égale à $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. On a donc le tableau :

X	100	-1
$p(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$

c. O a $\mathrm{E(X)} = 100 \times \frac{1}{8} + (-1) \times \frac{7}{8} = \frac{100-7}{8} = \frac{93}{8} = 11,625$ soit environ 11,63 €. Le jeu est donc très favorable au joueur.

3. a. La probabilité de perdre est donc égale à $1 - \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$.

On a donc $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = 100 \times \dfrac{1}{2^n} - 1 \times \dfrac{2^n - 1}{2^n} = \dfrac{100 - 2^n + 1}{2^n} = \dfrac{101 - 2^n + 1}{2^n}$.

b. $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) < 0 \iff \dfrac{101 - 2^n}{2^n} < 0 \iff 101 - 2^n < 0 \iff 101 < 2^n$.

La première puissance de 2 supérieure à 101 est $2^7 = 128$.

c. Avec ces conditions de jeu, celui-ci est favorable au joueur s'il faut lancer le dé jusque'à 6 fois. À partir de 7 lancers le jeu est défavorable au joueur.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : signe d'une fonction

1. Le point de la parabole d'abscisse nulle a pour ordonnée 3, soit $t(0) = 3 = c$.

2. Le point $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,4\right)$ est un point de la parabole, donc $4 = a\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + b\dfrac{1}{2} + 3 \iff 4 = \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{2} + 3 \iff$ $1 = \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{2} \iff 4 = a + 2b$

3. La tangente à la parabole en son sommet S est horizontale, donc le nombre dérivé $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Or $f'^{(x)} = 2ax + b$, d'où $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2a \times \dfrac{1}{2} + b = 0 \iff a + b = 0$.

4. Les deux questions précédentes montrent que les nombres a et b vérifient le système : (S) $\left\{\begin{array}{lcl} a + 2b & = & 4 \\ a + b & = & 0 \end{array}\right.$ Par différence membres à membres on obtient $b = 4$, puis par remplacement dans la seconde équation $a = -4$.

Conclusion : $t(x) = -4x^2 + 4x + 3$.

5. a. $g(x) = (2x+1)(3-2x)\mathrm{e}^{-x} = \left(6x - 4x^2 + 3 - 2x\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(-4x^2 + 4x + 3\right)\mathrm{e}^{-x} = t(x)\mathrm{e}^{-x}$.

b. On sait que, quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$: le signe de g est donc celui du trinôme t.

On sait maintenant que $t(x) = (2x+1)(3-2x)$: les racines du trinôme sont donc $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$.
Comme $a < 0$ on sait que ce trinôme est négatif sauf entre les racines.

Conclusion $g(x) < 0$ sauf sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right]$.

Partie B : étude de la fonction f

1. $4x^2 + 4x + 1 = x^2\left(4 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

On a $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} 4 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 4$ donc par produit des limites :
$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} 4x^2 + 4x + 1 = +\infty$.
Comme $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, on a par produit de limites :
$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(4x^2 + 4x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} = +\infty$.

2. On peut écrire :

$f(x) = \dfrac{4x^2}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x} = 0$, on a donc :

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Géométriquement ce résultat signifie que l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini à $\mathcal{C}_f$.

3. On a en dérivant le produit :

$f'(x) = (8x+4)\mathrm{e}^{-x} - 1 \times (4x^2+4x+1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(-4x^2-4x-1+8x+4\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(-4x^2+4x+3\right) = g(x)$. On a vu que sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$ seulement, $g(x) > 0$.

Calculs des extremums :

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = (1-2+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = 0\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = 0$.

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(4\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \times \frac{3}{2} + 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} = (9+6+1)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} = 16\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx 3,57$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$16\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	0

4. Dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0 \iff \left(4x^2+4x+1\right)\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff 4x^2+4x+1 = 0$, car quel que soit le réel $x, \mathrm{e}^{-x} \neq 0$.

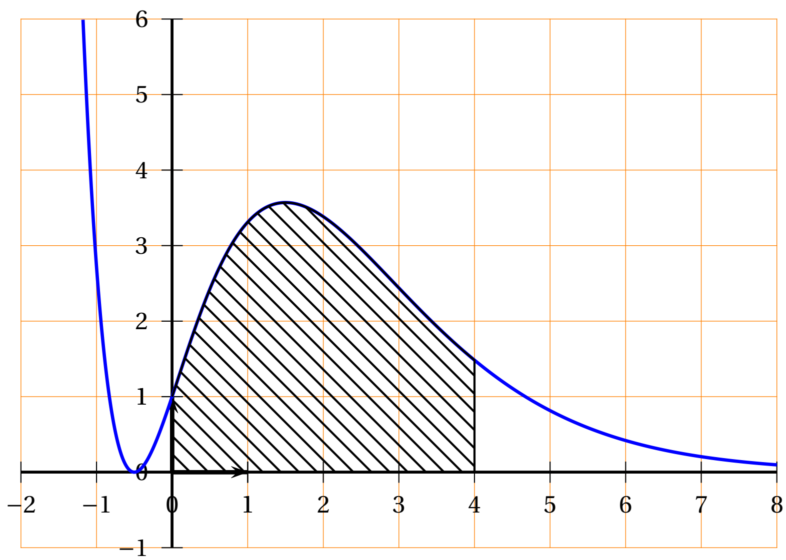
$4x^2+4x+1 = 0 \iff (2x+1)^2 = 0 \iff 2x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$.

L'équation a un e seule solution : $-\frac{1}{2}$.

Remarque : le tableau de variations montrait ce résultat, mais la dernière valeur du tableau n'est pas une valeur de $f(x)$, mais une limite.

La courbe $\mathcal{C}_f$ n'a donc qu'un point commun avec l'axe des abscisses, le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

5. Voir ci-dessous



Partie C : calcul d'aire

1. Une primitive de $x \longmapsto \text{e}^{-x}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto -\text{e}^{-x}$, donc une primitive de f est la fonction F définie par :
$x \longmapsto \text{F}(x) = \text{H}(x) - \text{e}^{-x} = (-4x^2 - 12x - 12)\text{e}^{-x} - \text{e}^{-x} = \text{e}^{-x}\left(-4x^2 - 12x - 12 - 1\right) = \text{e}^{-x}\left(-4x^2 - 12x - 13\right)$.

2. **a.** Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique.

   b. Voir la figure plus haut.
   Sur $[0\,;\,4]$, on a $f(x) > 0$, donc l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ est égale (en unité d'aire) à l'intégrale :
   $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\text{d}x = [\text{F}(x)]_0^4 = \text{F}(4) - \text{F}(0) = \text{e}^{-4}\left(-4 \times 4^2 - 12 \times 4 - 13\right) - \left(\text{e}^{-0}\left(-4 \times 0^2 - 12 \times 0 - 13\right)\right) =$
   $13 + 125\text{e}^{-4} \approx 10,710 \approx 10,71$ (u. a.).