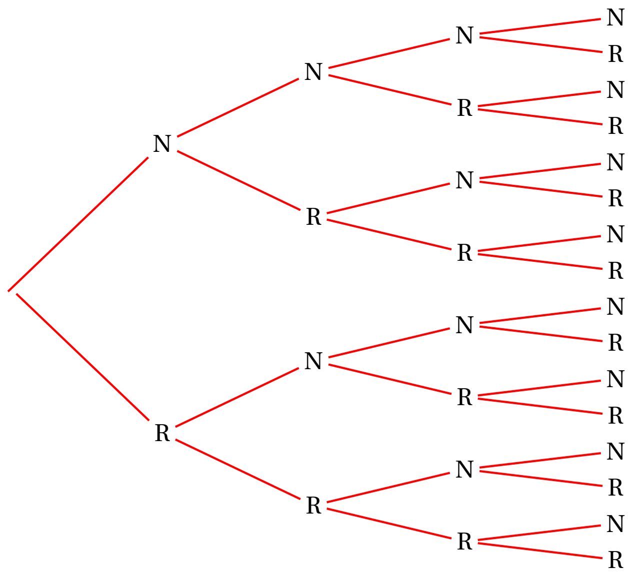
Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Polynésie 11 juin 2012 Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4 points**

1.



2. **a.** A et C sont des évènements contraires.

b. $p(A) = \dfrac{1}{16}$; $p(B) = \dfrac{1}{16}$ et d'après la question précédente $p(C) = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$.

3. **a.** Les valeurs de X sont : 360 ; 390 ; 420 ; 450 ; 480.

b. En utilisant l'arbre on obtient le tableau suivant :

X	360	390	420	450	480
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

c. On a $\text{E}(X) = 360 \times \frac{1}{16} + 390 \times \frac{4}{16} + 420 \times \frac{6}{16} + 450 \times \frac{4}{16} + 480 \times \frac{1}{16} = \frac{360+1\,560+2\,520+1\,800+480}{16} = \frac{6\,720}{16} = 420$ (€).

EXERCICE 2 **6 points**

1. Calcul du module : $|z_{\text{A}}|^2 = \left|-2\sqrt{3}+2\text{i}\right|^2 = 4 \times 3 + 4 = 16 = 4^2 \Rightarrow |z_{\text{A}}| = 4$.

En factorisant ce module : $z_{\text{A}} = 4\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 4\text{e}^{\frac{5\pi}{6}}$.

Comme $z_{\text{B}} = \overline{z_{\text{A}}}$, on a $z_{\text{B}} = 4\text{e}^{-\frac{5\pi}{6}}$.

A et B sont sur le cercle centré en O de rayon 4 ; on place A et B grâce à leurs ordonnées (leurs abscisses étant négatives).

2. **a.** L'image d'un point M d'affixe z par la rotation est le point M' d'affixe $z' = z \times \text{e}^{-\frac{\pi}{3}}$. Donc $z_{\text{C}} = z_{\text{A}} \times \text{e}^{-\frac{\pi}{3}} = 4\text{e}^{\frac{5\pi}{6}} \times \text{e}^{-\frac{\pi}{3}} = 4\text{e}^{-\frac{3\pi}{6}} = 4\text{e}^{\frac{\pi}{2}} = 4\text{i}$. C appartient donc à l'axe des ordonnées et a pour ordonnée 4 donc appartient au cercle précédent.

b. On a OB = OC = 4.
BA = $|z_A - z_B| = |4\text{i}| = 4$.
Enfin AC = $|z_C - z_A| = \left|4\text{i} + 2\sqrt{3} - 2\text{i}\right| = \left|2\sqrt{3} + 2\text{i}\right| = 4$.
OB = OC = AB = AC = 4 : le quadrilatère OCAB est un losange.
Autre méthode : On montre facilement que $\widehat{\text{AOB}} = \widehat{\text{COA}} = 60$ °, donc les triangles COA et AOB sont des triangles équilatéraux, donc OB = BA = AC = CO, ...

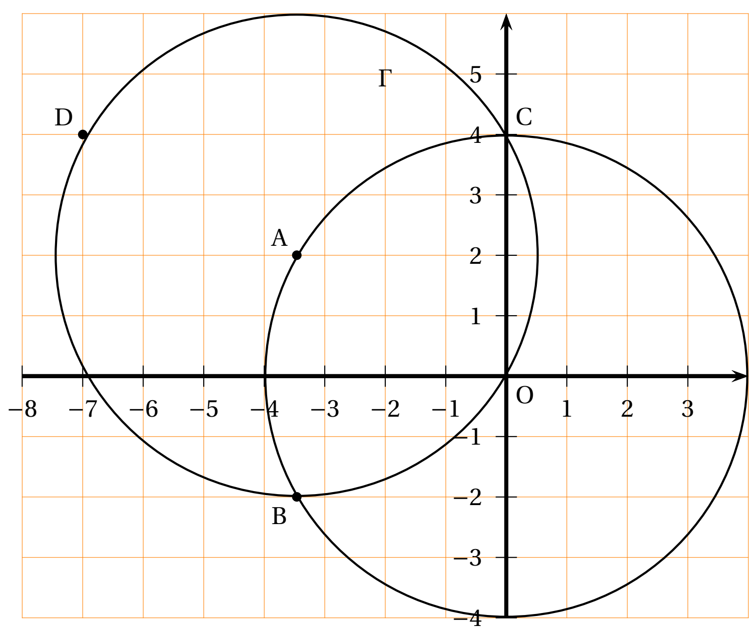
3. a. On calcule $\left|z_C + 2\sqrt{3} - 2\text{i}\right| = \left|4\text{i} + 2\sqrt{3} - 2\text{i}\right| : \left|2\sqrt{3} + 2\text{i}\right| = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$.
Donc C appartient à l'ensemble Γ.

b. M $\in$
$Gamma \iff \left|z + 2\sqrt{3} - 2\text{i}\right| = 4 \iff \left|z - \left(-2\sqrt{3} + 2\text{i}\right)\right| = 4 \iff |z - z_A| = 4 \iff$
A$M = 4 \iff M$ appartient au cercle de centre A et de rayon 4.

c. Voir plus bas

4. a. Voir la figure $\overrightarrow{\text{CD}} = -7\vec{u}$

b. L'affixe de D est égale à $z_D = z_C - 7 = 4\text{i} - 7$.
Calculons : AD = $\left|4\text{i} - 7 + 2\sqrt{3} - 2\text{i}\right| = \left|-7 + 2\sqrt{3} + 2\text{i}\right| = \sqrt{\left(-7 + 2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} =$
$\sqrt{49 + 12 - 28\sqrt{3} + 4} = \sqrt{65 - 28\sqrt{13}} \approx 4,06 \neq 4$.
Conclusion : le point D n'appartient pas au cercle Γ.



PROBLÈME **10 points**

Partie A : Lecture graphique

1. Il semble que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
2. Il semble que $f(\text{e}) = 0$, donc e est la seule solution de l'équation.
3. Il semble que :
   - si $0 < x < \text{e}$, $f(x) > 0$;
   - $f(\text{e}) = 0$;
   - si $x > \text{e}$, $f(x) < 0$.

4. Il semble que f est décroissante sur $]0\,;\,12[$ et croissante sur $]12\,;\,+\infty[$.

5. Le coefficient directeur de la tangente est égal à $\dfrac{4-9}{1}=-5$ et l'ordonnée à l'origine est égale à 9. Donc l'équation réduite de la tangente T doit être $y=-5x+9$.

6. Une valeur approchée de l'aire est 5,5 cm^2.

Partie B : Étude d'une fonction

1. On a $f(x)=\ln x(\ln x-5)+4$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, il résulte que $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x-5)=-\infty$ et par produit de limites $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.

2. a. On a de façon simple $X^2-5X+4=0 \iff X-5)(X-1)=0$: les solutions sont 1 et 4.

b. On a $f(x)=0 \iff (\ln x)2-5\ln x+4 \iff X^2-5X+4=0$ en posant $X=\ln x$. Les solutions étant $X=1$ et $X=4$ on a donc soit $\ln x=1 \iff x=\mathrm{e}$, soit $\ln x=4 \iff x=\mathrm{e}^4$.
L'équation $f(x)=0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$: e et e^4.

3. a. La fonction est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x)=2\times\ln x\times\dfrac{1}{x}-5\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln x-5}{x}$.
Comme $x>0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $2\ln x-5$.

b. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $2lnx-5=0 \iff 2\ln x=5 \iff \ln x=\dfrac{5}{2} \iff x=\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$. $\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}\approx 12,18\right)$

c. On a donc :

- si $2lnx-5<0 \iff x<\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$, alors $f'(x)<0$: la fonction f est décroissante sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}\right[$.
- si $2lnx-5>0 \iff x>\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$, alors $f'(x)>0$: la fonction f est croissante sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}\,;\,+\infty\right[$.

d. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2,25$	$\nearrow$	

4. On a $f(1)=0-0+4=4$ et $f'(1)=\dfrac{2\ln 1-5}{1}=-5$.
L'équation de la tangente T est donc $y-f(1)=f'(1)(x-1) \iff y-4=-5(x-1) \iff$
$y=-5x+5+4 \iff y=-5x+9$

On admet que G est une primitive de la fonction g et que H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

5. a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. Calculer $I=\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}-f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C : Conclusion

1. Parmi les conjectures formulées dans la partie A, indiquer en détaillant les réponses :
— celles qui ont été vérifiées ;
— celles qui sont fausses ;
— celles pour lesquelles on ne peut pas conclure.
On s'appuiera sur les résultats obtenus dans la partie B.

2. On souhaite tracer sur l'écran d'une calculatrice la courbe représentative de la fonction f de manière à visualiser les résultats établis dans la partie B. Proposer un paramétrage de fenêtre de la calculatrice qui permet d'obtenir un tel tracé.

Annexe (problème) à rendre avec la copie