Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie électronique Antilles-Guyane juin 2006

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** On a $|z_A|^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_A| = 2$.
On peut donc écrire : $z_A = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}\right)$.
Or $\cos\frac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.
Un argument de z_A est donc $\frac{\pi}{6}$.
On a donc $z_A = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Finalement $z_A = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$.
De même on a $|z_B|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_B| = 2$.
On peut donc écrire : $z_B = 2\left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Or $\cos\frac{-\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\frac{-\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Un argument de z_B est donc $-\frac{\pi}{3}$.
On a donc $z_B = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{-\pi}{3}\right)$. Finalement $z_B = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$

   b. Pour A on utilise la partie imaginaire et pour B la partie réelle. Voir le figure plus bas

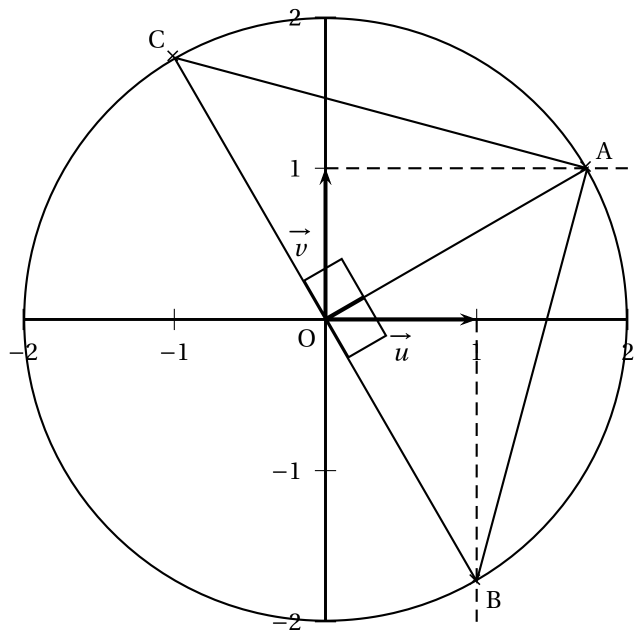
   c. On a $|z_A|^2 = \text{OA}^2 = 4$ et $|z_B|^2 = \text{OB}^2 = 4$, donc OA = OB = 2 : le triangle OAB est isocèle en O.
D'autre part $\text{AB}^2 = |z_B - z_A|^2 = \left|1 - \text{i}\sqrt{3} - \left(\sqrt{3} + \text{i}\right)\right|^2 = \left|\left(1 - \sqrt{3}\right) + \text{i}\left(-\sqrt{3} - 1\right)\right|^2 = \left(1 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(-\sqrt{3} - 1\right)^2 = 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} = 8$.
On a donc $4+4 = 8 \iff \text{OA}^2 + \text{OB}^2 = \text{AB}^2 \iff$ OAB est rectangle en O d'après la réciproque du théorème de Pythagore.
Finalement OAB est rectangle isocèle en O.

2. **a.** Par définition de la rotation OA = OC = 2, donc C appartient au cercle de centre O et de rayon 2. De plus l'un de ses arguments est égal à $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.
Voir la figure plus bas.

   b. Pour un point M d'affixe z, son image M' a une affixe z' égale à $z' = z\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = \text{i}z$.
Donc $z_C = z_A\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}} \times \text{ei}\frac{\pi}{2} = 2\text{ie}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.

   c. On a vu que OA = OB et que $\widehat{\text{BOA}} = 90$ °ce qui montre que l'image de B par la rotation est le point A.

   d. Par la rotation les points O, A et B ont pour images respectives : O, C et A : donc l'image du triangle OAB (isocèle rectangle) est le triangle isocèle rectangle OCA



EXERCICE 2 **5 points**

1. $RC = 1000 \times 10^{-4} = 10^{-1} = 0,1$, donc $\dfrac{1}{RC} = \dfrac{1}{0,1} = 10$.

$\dfrac{E}{R} = \dfrac{10}{1000} = 10^{-2}$.

L'équation différentielle est donc :

$$y' + 10y = 10^{-2}.$$

2. a. $q'(t) = -10^{-3} \times (-10)\mathrm{e}^{-10t} = 10^{-2}\mathrm{e}^{-10t}$.

Donc $q'(t) + 10q(t) = 10^{-2}\mathrm{e}^{-10t} + 10\left(-10^{-3}\mathrm{e}^{-10t} + 10^{-3}\right) =$
$10^{-2}\mathrm{e}^{-10t} - 10^{-2}\mathrm{e}^{-10t} + 10^{-2} = 10^{-2}$, ce qui signifie que la fonction q est une solution de l'équation différentielle.

b. $q(0) = -10^{-3} + 10^{-3} = 0$.

On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -10t = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-10t} = 0$ et par somme de limites $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} q(t) = 10^{-3}$.

On sait que $10^{-2} > 0$ et que quel que soit t $\mathrm{e}^{-10t} > 0$, donc par produit $q'(t) > 0$: la fonction q est donc croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ de 0 à 10^{-3}.

3. Il faut résoudre l'inéquation :

$10^{-2}\mathrm{e}^{-10t} \leqslant 10^{-3} \iff \mathrm{e}^{-10t} \leqslant 10^{-1} \iff -10t \leqslant \ln\left(10^{-1}\right) \iff -10t \leqslant -\ln 10$ (par croissance de la fonction ln) $\iff t \geqslant \dfrac{\ln 10}{10} \approx 0,23$ (s). Donc $t_0 \approx 0,23$ (s).

4. a. Une primitive de la fonction $\mathrm{e}^{u(t)}$, u étant une fonction dérivable, est $\dfrac{1}{u'}\mathrm{e}^{u(t)}$, donc une primitive de h sur $[0\,;\,+\infty[$ est $\dfrac{1}{-20}\mathrm{e}^{-20t}$.

b. On a donc :

$W = 1000\displaystyle\int_0^{0,23} i^2(t)\,\mathrm{d}t = 1000\int_0^{0,23} \left(10^{-2}\mathrm{e}^{-10t}\right)^2\,\mathrm{d}t =$

$1000\displaystyle\int_0^{0,23} \times 10^{-4} \times \mathrm{e}^{-20t}\,\mathrm{d}t = 1000 \times 10^{-4}\int_0^{0,23} \mathrm{e}^{-20t}\,\mathrm{d}t =$

$10^{-1}\displaystyle\int_0^{0,23} \mathrm{e}^{-20t}\,\mathrm{d}t = 10^{-1}\left[\frac{1}{-20}\mathrm{e}^{-20t}\right]_0^{0,23} = -\frac{0,1}{20}\left[\mathrm{e}^{-20t}\right]_0^{0,23}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{200}\left[\mathrm{e}^{-20t}\right]_0^{0,23}\,\mathrm{d}t =$
$\dfrac{1}{200}\left[1-\mathrm{e}^{-20\times 0,23}\right] = \dfrac{1}{200}\left[1-\mathrm{e}^{-4,6}\right] \approx 0,005.$

PROBLÈME **11 points**

Partie I

1. **a.** Puisque la fonction est décroissante, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

   b. La réponse est non. On ne peut pas savoir la fonction a une limite finie ou infinie au voisinage de plus l'infini.

2. **a.** La représentation graphique montre que la fonction f s'annule deux fois sur l'intervalle $[1\,;\,15]$, l'une α telle que $2 < \alpha < 3$ et l'autre β telle que $7 < \beta < 8$.

   b. D'après la représentation graphique : $2,5 < \alpha < 3,0$ et $7,0 < \beta < 7,5$.

   c. On « voit » que :
   — $f(x) > 0$ sur $[1\,;\,\alpha[$ et sur $]\beta\,;\,15]$;
   — $f(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,\beta[$.
   — $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

3. **a.** On sait que le coefficient directeur de la tangente en A est égal à $f'(1)$. Or ce coefficient directeur est égal à $\dfrac{-2-4}{2-1} = -6$.
   Donc $f'(1) = -6$.

   b. On a : $M(x\,;\,y) \in (\mathrm{AB}) \iff y = ax+b$.
   On sait que $a = f'(1) = -6$.
   D'autre part :
   $\mathrm{A}(1\,;\,4) \in (\mathrm{AB}) \iff 4 = -6\times 1 + b \iff 10 = b$.
   Conclusion : $M(x\,;\,y) \in (\mathrm{AB}) \iff y = -6x+10$.

Partie II

1. **a.** On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} -6\ln x = +\infty$ (par produit) et finalement par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
   On retrouve que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de zéro.

   b. Si $x \neq 1$, $\ln x \neq 0$, on peut donc en factorisant $\ln x$:
   $f(x) = \ln x\left[2\ln x - 6 + \dfrac{1}{\ln x}\right]$.
   Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$.
   Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln x - 6 + \dfrac{1}{\ln x} = +\infty$ et finalement par produit de limites :
   $\lim\limits_{x\to +\infty} = f(x) = +\infty$.

2. **a.** On a $f'(x) = 2\times \ln x \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x} = \dfrac{4\ln x - 6}{x}$.

   b. $4\ln x - 6 > 0 \iff 4\ln x > 6 \iff \ln x > \dfrac{3}{2} \iff \mathrm{e}^{\ln x} > \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} \iff x > \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.

   c. Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur : $4\ln x - 6$.
   Donc sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\,;\,+\infty\right[$, $f'(x) > 0$, donc la fonction est croissante.
   On obtient de même que sur $\left[0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right[$, $f'(x) < 0$, donc la fonction est décroissante.

Enfin $f'\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right) = 0$; cette valeur donne le minimum de la fonction
$f\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right) = 2\left[\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)\right]^2 - 6\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right) + 4 = 2 \times \frac{9}{4} - 6 \times \frac{3}{2} + 4 = \dfrac{9}{2} - \frac{18}{2} + \frac{8}{2} = -\frac{1}{2}$.

3. **a.** Sur $\left[1\,;\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right]$, on a $f(1) = 4 > 0$ et $f\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right) = -\dfrac{1}{2} < 0$.
Il existe donc un réel unique $\alpha \in \left[1\,;\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\,;\,15\right]$, on a $f\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right) = -\dfrac{1}{2} < 0$ et $f(15) \approx 2,4 > 0$.
Il existe donc un réel unique $\beta \in \left[\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\,;\,15\right]$ tel que $f(\beta) = 0$.

   b. $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 2\left[\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)\right]^2 - 6\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) + 4 = 2 \times \dfrac{1}{4} - 6 \times \dfrac{1}{2} + 4 = \dfrac{3}{2}$.
$f(\mathrm{e}) = 2[\ln \mathrm{e}]^2 - 6\ln \mathrm{e} + 4 = 2 + 4 - 6 = 0$;
$f\left(\mathrm{e}^2\right) = 2\left[\ln\left(\mathrm{e}^2\right)\right]^2 - 6\ln\left(\mathrm{e}^2\right) + 4 = 2 \times 4 - 6 \times 2 + 4 = 0$.

   c. Comme l'équation $f(x) = 0$ n'a sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ que deux solutions, ces solutions son donc $\alpha = \mathrm{e}$ et $\beta = \mathrm{e}^2$.

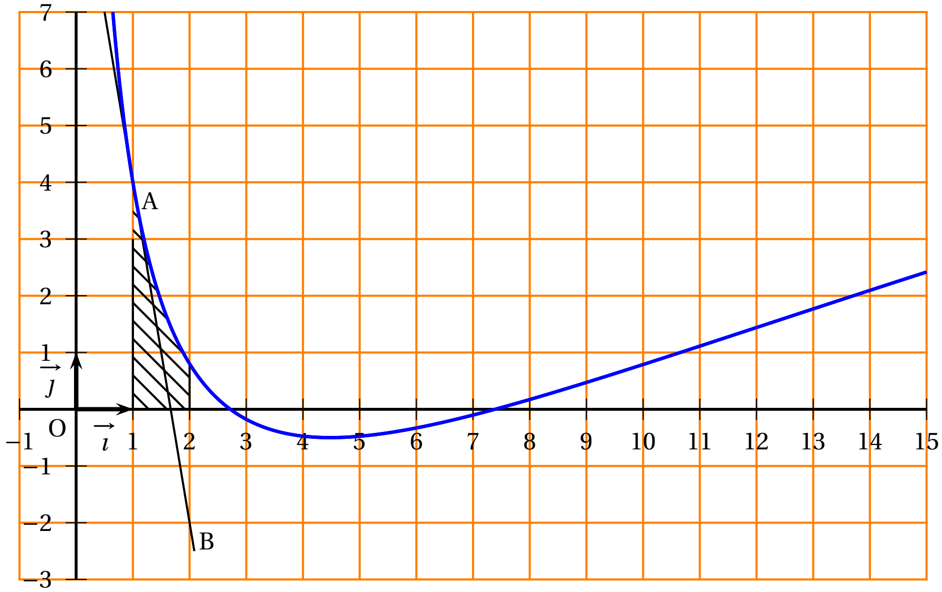
4. On a $M(x\,;\,y) \in \mathrm{T} \iff y - f(1) = f'(1)(x-1)$.
On a $f'(1) = \dfrac{4\ln 1 - 6}{1} = -6$ et $f(1) = 2 \times 0^2 - 6 \times 0 + 4 = 4$.
Donc $M(x\,;\,y) \in \mathrm{T} \iff y - 4 = -6(x-1) \iff y = 4 - 6x + 6 \iff y = -6x + 10$.
On retrouve l'équation trouvée ci-dessus.

Partie III

1. Voir l'annexe
2. On a sur $]0\,;\,+\infty[$, $F'(x) = 2(\ln x)^2 + 2x \times 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x - 10\ln x - 10x\dfrac{1}{x} + 14 = 2(\ln x)^2 + 4\ln x - 10\ln x - 10 + 14 = 2(\ln x)^2 - 6\ln x + 4 = f(x)$.
Cette égalité montre que F est une primitive de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ on a vu que la fonction est positive donc l'aire en unité d'aire de la surface hachurée est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x. =$

   b. F étant une primitive de f sur $[1\,;\,2]$, on a
$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) =$
$2 \times 2(\ln 2)^2 - 10 \times 2\ln 2 + 14 \times 2 - \left(2 \times 1(\ln 1)^2 - 10 \times 1\ln 1 + 14 \times 1\right) =$
$4(\ln 2)^2 - 20\ln 2 + 28 - 14 = 4(\ln 2)^2 - 20\ln 2 + 14$ (u. a.).
Comme 1 u. a. $= 1 \times 1 = 1$ cm^2,
$\mathscr{A}(\mathrm{D}) \approx 2,06$ cm^2 au mm^2 près. (Ce que l'on vérifie approximativement sur l'annexe).

Feuille annexe à rendre avec la copie



Si vous photocopiez ce corrigé pensez à en créditer l'**A. P. M. E. P.**, merci