Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat STI Antilles-Guyane 13 septembre 2012 ∾
Génie électronique, électrotechnique & optique

EXERCICE 1 **4 points**

1. $z_B = e^{i\pi}$: module 1 et argument π.

2. On a $|z_A|^2 = 2+6 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow |z_A| = 2\sqrt{2}$.
   En factorisant ce module :
   $z_A = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

3. L'image d'un point M d'affixe z par la rotation est le point M' d'affixe z' telle que $z' = ze^{\frac{\pi}{4}} = z\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   Donc $z_{A'} = z_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}} = 1-\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

4. On sait que $|z_A| = 2\sqrt{2}$, donc $u_n = \left(2\sqrt{2}\right)^n$: c'est une suite géométrique de raison $2\sqrt{2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

1. 99 % des 1 000 soit $0,99\times 1\,000 = 990$ ont donné la bonne réponse. Donc $p(R) = \dfrac{990}{1\,000} = \dfrac{99}{100} = 0,99$.

2. Sur 1 000 participants 16 ont gagné un lot ; $p(G) = \dfrac{16}{1\,000} = \dfrac{2\times 8}{125\times 8} = \dfrac{2}{125}$.

3. **a.** X prend la valeur 299 lorsqu'un joueur gagne une des cinq consoles.
   On a donc $p(X=299) = \dfrac{5}{1\,000} = \dfrac{1}{200}$.

   b. X peut valoir -1 (joueur perdant), 49 (gain d'un chèque de 50 €), 299 (gain d'une console) ou 999 (gain du voyage).

   c. Le tableau de la loi de probabilité de X est le suivant :

X	-1	49	299	999
$p(X=x_i)$	$\dfrac{984}{1\,000}$	$\dfrac{10}{1\,000}$	$\dfrac{5}{1\,000}$	$\dfrac{1}{1\,000}$

   d. $E(X) = -1\times\dfrac{984}{1\,000}+49\times\dfrac{10}{1\,000}+299\times\dfrac{5}{1\,000}+999\times\dfrac{1}{1\,000} = \dfrac{-984+490+1\,495+999}{1\,000} = \dfrac{2\,000}{1\,000} = 2$.

Partie B

1. Le nouveau tableau devient en remplaçant 1 000 par n :

X	-1	49	299	999
$p(X=x_i)$	$\dfrac{n-16}{n}$	$\dfrac{10}{n}$	$\dfrac{5}{n}$	$\dfrac{1}{n}$

2. $\mathrm{E}(X_n) = -1 \times \dfrac{n-16}{n} + 49 \times \dfrac{10}{n} + 299 \times \dfrac{5}{n} + 999 \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{-n+16+490+1495+999}{n} = \dfrac{3000-n}{n}$.
3. Le jeu est favorable au joueur s'il gagne plus que sa mise soit 1 euro ; donc
   $\mathrm{E}(X_n) > 1 \iff \dfrac{3000-n}{n} > 1 \iff 3000 - n > n \iff 2n < 3000 \iff n < 1500$.
   Le jeu est favorable aux joueurs jusque'à $n = 1499$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. **a.** On lit $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ (tangente de pente nulle).

   b. $f(x) = a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{-2x}$ entraîne :
   $f'(x) = -a\mathrm{e}^{-x} - 2b\mathrm{e}^{-2x}$. D'où :
   $f(0) = a + b$;
   $f'(0) = -a - 2b$.

   c. On a donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 1 \\ -a-2b & = & 0 \end{array}\right. \iff -b = 1 \quad \text{(par somme) soit } b = -1.$$

   En reportant la valeur trouvée pour b dans la première équation on obtient $a - 1 = 1 \iff a = 2$.
   Donc $f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}$.
2. On a $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-2x}$;
   $f''(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^{-2x}$.
   On a $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^{-2x} + 3\left(-2\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-2x}\right) + 2\left(2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}\right) = 2\mathrm{e}^{-x} - 6\mathrm{e}^{-x} + 4\mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^{-2x} + 6\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-2x} = 0$.
   f est bien une solution de l'équation différentielle.

Partie B

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, donc :
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Géométriquement ce résultat signifie que l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.
2. Quel que soit le réel x, $f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} = 2\mathrm{e}^{-2x} \times \mathrm{e}^{x} - 1 \times \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)$. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right) = -1$.
   D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$, donc par produit de limites :
   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
3. **a.** $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-2x} = -2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{-2x} = 2\mathrm{e}^{-2x}\left(-\mathrm{e}^{x} + 1\right) = 2\mathrm{e}^{-2x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right)$ pour tout réel x.

   b. $1 - \mathrm{e}^{x} > 0 \iff 1 > \mathrm{e}^{x} \iff \ln 1 > \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right)$ par croissance de la fonction ln, soit $0 > x$
   On a donc $1 - \mathrm{e}^{x} > 0 \iff x < 0$.
   En utilisant l'écriture précédente de $f'(x)$:
   $f'(x) > 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{x} > 0 \iff 2\mathrm{e}^{-2x}\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right) > 0 \iff \mathrm{e}^{x} - 1 > 0$ car on sait que quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-2x} > 0$.
   Donc $f'(x) > 0 \iff x < 0$.
   On trouverait de même que $f'(x) < 0 \iff x > 0$.

   c. Les résultats précédents montrent que :
   - f est croissante sur $]-\infty\,;\,0[$;
   - f est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Partie C

1. On a vu que l'on pouvait écrire :
$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)$, donc $f(x) = 0 \iff \mathrm{e}^{-2x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right) = 0 \iff 2\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$ (car $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, puis $2\mathrm{e}^{x} = 1 \iff \mathrm{e}^{x} = \dfrac{1}{2} \iff \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \iff x = -\ln 2$.

2. **a.** On a $f'(-\ln(2)) = 2\mathrm{e}^{-2\times(-\ln 2)}\left(1 - \mathrm{e}^{-\ln 2}\right) = 2\mathrm{e}^{2\ln 2}\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}}\right) = 2\left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^2\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = 2 \times 2^2 \times \dfrac{1}{2} =$
$f'(-\ln(2)) = 4$.

   b. Une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est :
$y - y_{\mathrm{B}} = f'(x_{\mathrm{B}}\left(x - x_{\mathrm{B}}\right)$ soit
$y - 0 = 4(x - (-\ln 2)) \iff y = 4x + 4\ln 2$.

3. **a.** La fonction g est décroissante sur $]-\infty\,;\,-\ln 2[$, croissante sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

   b. $g(-\ln(2)) = -4 \times (\ln 2) + 4\ln 2 - f(-\ln 2) = -\left(2\mathrm{e}^{-(-\ln 2} - \mathrm{e}^{-2\times(-\ln 2)}\right) = -2\mathrm{e}^{\ln 2} + \mathrm{e}^{2\ln 2} = -2 \times 2 + 2^2 = -4 + 4 = 0$.

   c. Le tableau de variations a montré que $g(-\ln(2)) = 0$ est le minimum de la fonction g. On a donc pour tout réel x, $\mathrm{g(x)} \geqslant 0$.

   d. Géométriquement le dernier résultat montre que tout point de la droite $\mathscr{D}$ est au dessus du point de même abscisse de la fonction f, donc que la tangente $\mathscr{D}$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

4. **a.** G somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur $\mathbb{R}$:
$G'(x) = 4x + 4\ln 2 - 2\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{2} \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} = 4x + 4\ln 2 - 2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} = 4x + 4\ln 2 - \left(2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}\right) = 4x + 4\ln 2 - f(x) = g(x)$.
G est donc bien l'une des primitives de la fonction g.

   b. $\displaystyle\int_{-\ln(2)}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_{-\ln 2}^{0} = G(0) - G - \ln 2) =$
$2 \times 0^2 + (4\ln(2)) \times 0 + 2\mathrm{e}^{-0} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\times 0} - \left[2(-\ln 2)^2 + (4\ln(2)) \times (-\ln 2) + 2\mathrm{e}^{\ln 2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\times(-\ln 2)}\right] =$
$2 - \dfrac{1}{2} - 2(\ln 2)^2 + 4(\ln 2)^2 - 4 + \dfrac{1}{2} \times 4 = -\dfrac{1}{2} + 2(\ln 2)^2 = 2(\ln 2)^2 - \dfrac{1}{2} \approx 0,461$ (unité d'aire).