Corrigé du baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie novembre 2010 Génie électronique, électrotechnique et optique

Exercice 1 **5 points**

1. $\Delta = 3 - 4 = -1 = \text{i}^2 < 0$: l'équation a donc deux solutions complexes :
$z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+\text{i}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-\text{i}}{2}$.

2. **a.** $|z_A|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$. D'où $|z_A| = 1$.
$z_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{6}$: un argument de z_A est donc $\dfrac{\pi}{6}$.
On a $z_A = \overline{z_A}$, donc $|z_B| = 1$ et un argument de z_A est $-\dfrac{\pi}{6}$.

   b. On a donc $z_A = 1\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

   c. On place A et B sur le cercle de centre O, de rayon 1, A avec son ordonnée $\dfrac{1}{2}$ et B avec son ordonnée $-\dfrac{1}{2}$. Voir la figure à la fin

3. **a.** On construit sur le cercle trigonométrique à partir de O et de B, deux triangles équilatéraux avec deux angles au centres de $\dfrac{\pi}{3}$. Voir la figure

   b. On sait que $z_C = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}} z_B = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}} \times \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}} = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)} = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{3\pi}{6}\right)} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = \text{i}$.
Le point C appartient à l'axe des imaginaires.

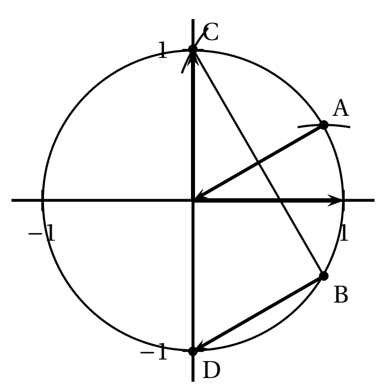
4. **a.** On a $z_{\overrightarrow{\text{AO}}} = z_O - z_A = -z_A = -\dfrac{\sqrt{3}+\text{i}}{2}$.

   b. Par définition de la translation on a : $\overrightarrow{\text{BD}} = \overrightarrow{\text{AO}}$ soit $z_D - z_B = -\dfrac{\sqrt{3}+\text{i}}{2}$ ou $z_D = \dfrac{\sqrt{3}-\text{i}}{2} - \left(\dfrac{\sqrt{3}+\text{i}}{2}\right) = -\text{i}$. Le point D appartient lui aussi à l'axe des imaginaires.

   c. Voir la figure.

5. On a de suite $\text{OD} = |z_D| = 1$, on savait déjà que $\text{OB} = 1$ et l'égalité $\overrightarrow{\text{BD}} = \overrightarrow{\text{AO}}$ montre pour les modules que $\text{BD} = \text{AO} = 1$.
Le triangle OBD a ses trois de même longueur 1 : il est équilatéral.

6. De façon évidente [CD] est un diamètre et B est un point du cercle de diamètre [BD : triangle inscrit dans le demi-cercle de diamètre [BD], il est rectangle en B.



EXERCICE 2 **4 points**

1.

	Pièces ayant un défaut de diamètre	Pièces n'ayant pas un défaut de diamètre	Total
Pièce ayant un défaut d'épaisseur	5	10	15
Pièce n'ayant pas un défaut d'épaisseur	13	472	485
Total	18	482	500

2. On sait qu'il y a 5 pièces sur 500 présentant les deux défauts ; la probabilité est donc égale à $\dfrac{5}{500} = \dfrac{1}{100} = 0,01$.

3. Sur les 18 pièces qui présentent un défaut de diamètre, 5 ont un défaut d'épaisseur ; la probabilité est donc égale à $\dfrac{5}{13} \approx 0,384 \approx 0,38$ à 10^{-2} près.

4. a. Ont zéro défaut : 472 pièces ;
Ont un défaut : 13 + 10 = 23 pièces ;
Ont deux défauts : 5 pièces. D'où le tableau de la loi de probabilité de X

X	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\dfrac{472}{500}$	$\dfrac{23}{500}$	$\dfrac{5}{500}$

b. On a $\text{E}(X) = 0 \times \dfrac{472}{500} + 1 \times \dfrac{23}{500} + 2 \times \dfrac{5}{500} = \dfrac{23}{500} + \dfrac{10}{500} = \dfrac{33}{500} = 0,066$.

PROBLÈME **11 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Détermination d'une fonction f

1. On a $f(0) = 7$; $f'(0) = \dfrac{1-7}{0-(-2)} = -3$ et $f'(3) = 0$ (tangente horizontale, donc nombre dérivé nul pour $x = 3$.

2. L'écriture $f(x) = (ax+b)\text{e}^x + c$ donne pour $x = 0$, $\quad f(0) = b\text{e}^0 + c = b + c$.

3. a. f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = a\text{e}^x + (ax+b)\text{e}^x = \text{e}^x(a+ax+b) = (ax+a+b)\text{e}^x$.

b. Le résultat précédent donne pour $x = 0$ et $x = 3$, respectivement :
$f'(0) = (a \times 0 + a + b)\text{e}^0 = a + b$;
$f'(3) = (a \times 3 + a + b)\text{e}^3 = (4a+b)\text{e}^3$.

4. a. En utilisant tous les résultats précédents on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 7 \\ f'(0) & = & -3 \\ f'(3) & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{lcll} b+c & = & 7 & (1) \\ a+b & = & 3 & (2) \\ 4a+b & = & 0 & (3) \end{array}\right.$$

b. Par différence (3) - (2), on obtient :
$3a = -3$ soit $a = -1$; (2) donne alors $-1 + b = 3$ ou $b = 1 + 3 = 4$ et (1) donne $4 + c = 7$ soit $c = 3$.
Conclusion : f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x+4)\text{e}^x + 3$.

Partie B : Étude de la fonction f

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(-x+4)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.
2. En développant on obtient :
   $f(x)=-x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3$.
   On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}4\mathrm{e}^x=0$ et on admet que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^x=0$; donc par somme de limites on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=3$.
   Géométriquement ce résultat signifie que la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.
3. **a.** On a vu à la partie A que :
   $f'(x)=(ax+a+b)\mathrm{e}^x=(-1x+(-1)+4)\mathrm{e}^x=(-x+3)\mathrm{e}^x$.
   On sait que $\mathrm{e}^x>0$ quel que soit le réel x, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(-x+3)$. D'où :
   si $-x+3>0$ ou $x<3$, $f'(x)>0$: la fonction est donc croissante sur $]-\infty\ ;\ [$;
   si $-x+3<0$ ou $x>3$, $f'(x)<0$: la fonction est donc décroissante sur $]3\ ;\ +\infty[$.
   $f(3)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$: $f(3)=(-3+4)\mathrm{e}^3=\mathrm{e}^3$.

   b.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^3	$\searrow$	3

Partie C : Calcul d'aire

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $F'(x)=-\mathrm{e}^x+(-x+5)\mathrm{e}^x+3=\mathrm{e}^x(-x+4)+3=f(x)$.
   Donc F est primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$
2. **a.** Voir la figure
   b. La courbe $\mathscr{C}$ étant au dessus de la droite T, l'aire, en unité d'aire de D est égal à l'intégrale :
   $\mathscr{A}=\displaystyle\int_0^3[f(x)-(3x+7)]\,\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^3 3x\,\mathrm{d}x-\int_0^3 7\,\mathrm{d}x=[F(x)]_0^3-\frac{3}{2}[x^2]_0^3-7[x]_0^3=$
   $(-3+5)\mathrm{e}^3+3\times3-\big((-0+5)\mathrm{e}^0+3\times0\big)-\dfrac{3}{2}3^2+\dfrac{3}{2}0^2-7\times3+7\times0=2\mathrm{e}^3+9-5-\dfrac{27}{2}-21=$
   $2\mathrm{e}^3-\dfrac{61}{2}\approx 9,671\approx 9,67$ unité d'aire.(résultat que l'on peut conforter approximativement sur la figure chaque carré ayant une aire de 4).

Annexe (problème) à rendre avec la copie