Durée : 4 heures

∾ Corrigé du baccalauréat STI novembre 2006 Nouvelle-Calédonie ∾ Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **6 points**

1. $$z^2 - 4z\sqrt{3} + 16 = 0.$$

   $\Delta = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 16 = 48 - 64 = -16 = (4\text{i})^2$: l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

   $$\frac{4\sqrt{3}+4\text{i}}{2} = 2\sqrt{3}+2\text{i} \quad \text{et} \quad 2\sqrt{3}-2\text{i}.$$

2. **a.** On a $|z_A|^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + (2)^2 = 12+4 = 16 = 4^2 \Rightarrow |z_A| = 4$ et comme z_A et z_B sont conjugués, $|z_B| = 4$.

   On peut alors écrire $z_A = 4\left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{-\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{-\pi}{3}\right)$.

   Un argument de z_A est donc égal à $\dfrac{-\pi}{3}$ et un argument de z_B est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.

   b. Voir plus bas : les points A et B sont les points communs au cercle centré en O de rayon 4 et de la droite d'équation $x = 2$.

   c. On a $\left|\dfrac{z_B}{z_A}\right| = \dfrac{|z_B|}{|z_A|} = \dfrac{4}{4} = 1$.

   Pour l'argument : $\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = \dfrac{\pi}{3} - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

   d. On vient de voir que $\left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$, donc l'angle de la rotation de centre O, qui transforme A en B est $\dfrac{2\pi}{3}$.

3. **a.** On a $z_C = -z_A = -2\sqrt{3}+2\text{i}$.

   b. On a donc $z_{AD} = z_{\overrightarrow{w}} = z_{-4\sqrt{3}\overrightarrow{u}}$, soit :

   $z_D - z_A = -4\sqrt{3} \iff z_D = -4\sqrt{3} + z_A = -4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\text{i} = -2\sqrt{3} - 2\text{i}$.

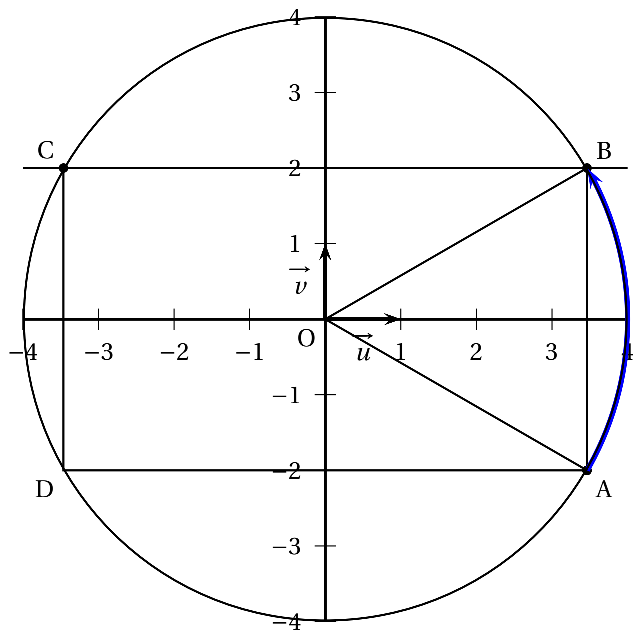
4. On a $z_{\overrightarrow{AB}} = 4\text{i}$ et $z_{\overrightarrow{DC}} = -2\sqrt{3}+2\text{i} - \left(-2\sqrt{3}-2\text{i}\right) = 4\text{i}$.

   Conclusion $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff$ ABCD est un parallélogramme.

   D'autre part B et C ont la même ordonnée, donc la droite (BC) est perpendiculaire à l'axe de sordonnées ;

   A et B ont la même abscisse, donc la droite (AB) est perpendiculaire à l'axe des abscisses.

   Conclusion : (AB) et (BC) sont perpendiculaires : le quadrilatère ABCD est donc un rectangle.



EXERCICE 2 **4 points**

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. **a.** Les solutions sont de la forme : $y = A\cos 2t + B\sin 2t,\ A, \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$.

   b. $\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 5\\ f'(0) & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 5\\ 2B = 0 & & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 5\\ B & = & 0\end{array}\right.$

   La solution s'écrit donc $f(t) = 5\cos 2t$.

2. **a.** Sachant que $-1 \leqslant \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$ on a $-\mathrm{e}^{-t} \leqslant \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ puis $-\mathrm{e}^{-t} \leqslant \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ et enfin $-5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t} \leqslant -5\sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$.

   Conclusion : pour tout $t \geqslant 0$, on a : $-5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t} \leqslant f(t) \leqslant 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$.

   b. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} -5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} -5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$; donc par encadrement des limites $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$. Ceci montre que pour t assez grand le mobile va se rapprocher du point O.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

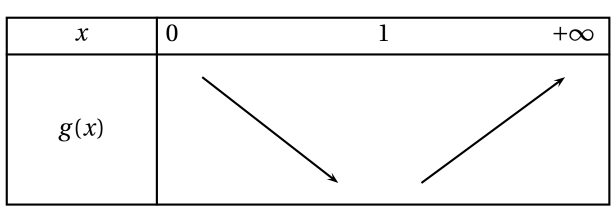
1. **a.** Sur $]0~;~+\infty[$ la fonction g est dérivable et

   $g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x^2 - 2}{x} = \dfrac{2\left(x^2 - 1\right)}{x}$

   b. Comme $x > 0$, la dérivée est du signe du trinôme $x^2 - 1$ donc positive sauf entre -1 et 1.

   Donc sur $]0~;~1[$, $g'(x) < 0$ et f est décroissante ;

   sur $]1~;~+\infty[$, $g'(x) > 0$ et f est croissante, d'où le tableau de variations :



2. On a $g(1) = 1+1 = 2$; le minimum de la fonction étant supérieur à zéro, la fonction g est positive non nulle sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : étude de la fonction f

1. **a.** Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2\ln(x)}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
Géométriquement : l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de zéro.

 b. On peut écrire $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + 2\dfrac{\ln(x)}{x}$
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{12}{x} = 0$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$,
on peut conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** Soit la fonction d définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $d(x) = f(x) - x = \dfrac{1+2\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{x} + 2\dfrac{\ln(x)}{x}$ et d'qaprès les résultats précédents $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x) = 0$, ce qui signifie que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

 b. Pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{1}{x} > 0$ et $\dfrac{\ln(x)}{x} > 0$, donc $d(x) > 0$, ce qui signifie que la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (Δ).

3. **a.** En posant $u(x) = 1+2\ln(x)$ et $v(x) = x$, on a $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{\frac{2}{x}\times x - 1(1+2\ln(x))}{x^2} = \dfrac{1-2\ln(x)}{x^2}$.
Donc $f'(x) = 1 + \dfrac{1-2\ln(x)}{x^2} = \dfrac{x^2+1-2\ln(x)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

 b. On sait que $x^2 > 0$ et que $g(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc $f'(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$. D'où le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

On a $M(x\ ;\ y) \in (\mathrm{T}) \iff y - f(1) = f'(1)(x-1) \iff y - 2 = 2(x-1) \iff y = 2x$.

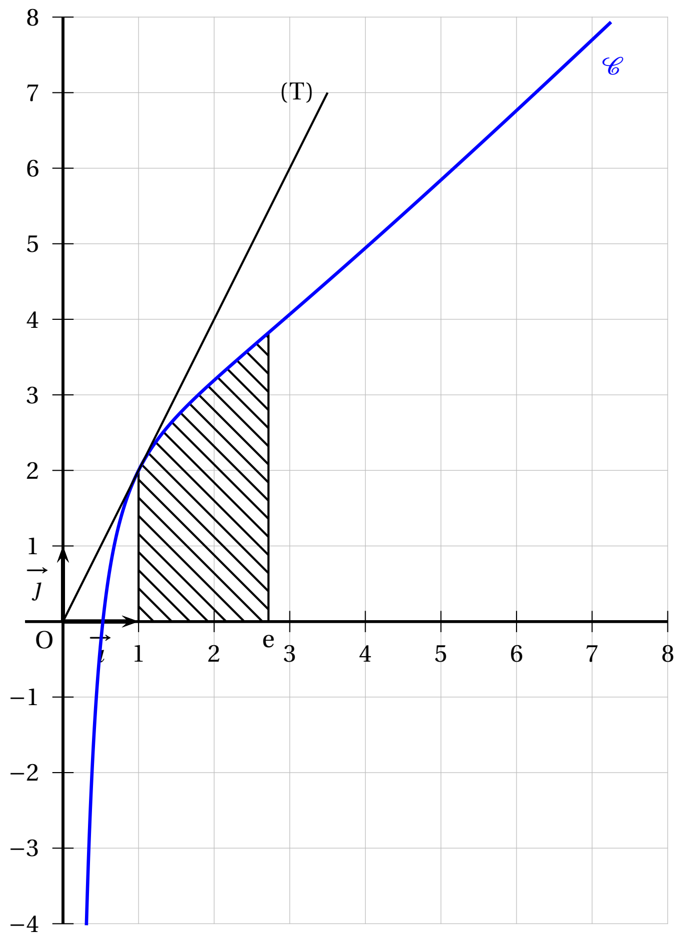
5. Voir la figure à la fin.

Partie C : calculs d'aire

1. Sur $]0\ ;\ +\infty[$, F est dérivable et
$F'(x) = x + \dfrac{1}{x} + 2\ln(x)\times\dfrac{1}{x} = x + \dfrac{1+2\ln(x)}{x} = f(x)$.
F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Voir plus bas.

 b. La fonction est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ et $f(1) = 2 > 0$: donc la fonctioin est positive sur cet intervalle et l'aire (en u. a.) de la partie $(\mathscr{D})$ est égale à l'intégrale :
$\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{\mathrm{e}} = F(\mathrm{e}) - F(1) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} + \ln(\mathrm{e}) + [\ln(\mathrm{e})]^2 - \left(\dfrac{1^2}{2} + \ln(1) + [\ln(1)]^2\right) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} + 1 + 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} = \dfrac{3-\mathrm{e}^2}{2}$ (u. a.).
Or l'unité d'aire est égale à $2\times 2 = 4$ cm^2, donc l'aire de la partie $(\mathscr{D})$ est égale à $4\left(\dfrac{3-\mathrm{e}^2}{2}\right) = 2\left(3-\mathrm{e}^2\right)$.



Si vous photocopiez ce corrigé pensez à en créditer l'**A. P. M. E. P.**, merci