Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI La Réunion juin 2008 Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **6 points**

1. Résolution de l'équation $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$:

$\Delta = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 48 - 64 = -16$; donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{4\sqrt{3}+4\text{i}}{2} = 2\sqrt{3} + 2\text{i}$ et $z_2 = \frac{4\sqrt{3}-4\text{i}}{2} = 2\sqrt{3} - 2\text{i}$.

$\boxed{S = \{2\sqrt{3} + 2\text{i}\,;\, 2\sqrt{3} - 2\text{i}\}}$

2. a. $z_C = 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}} = 4(-\text{i}) = \boxed{-4\text{i}}$.

b. $|z_A| = \left|2\sqrt{3} + 2\text{i}\right| = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$;

$z_B = \overline{z_A}$, donc $|z_B| = |z_A| = 4$;

$\arg(z_A) = \arg\left(2\sqrt{3} + 2\text{i}\right) = \arg\left(4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{i}\right)\right) = \arg\left(4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

$\arg(z_B) = -\arg(z_A) = -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

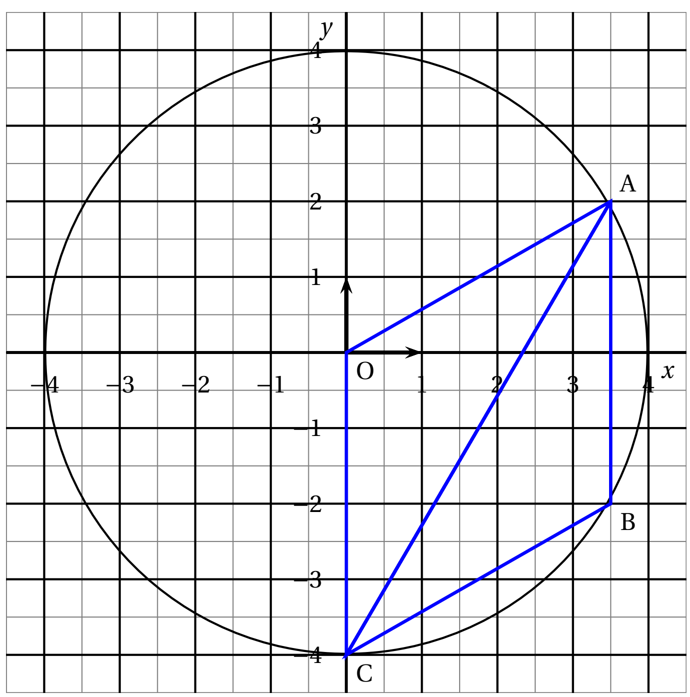
$\arg(z_C) = \arg\left(4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Conclusion :

$\boxed{|z_A| = |z_B| = |z_C| = 4 \; \arg(z_A) = \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \; \arg(z_B) = -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi] \; \arg(z_C) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]}$

c. On a $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 4$, donc OA = OB = OC = 4, donc les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

d. Figure :



e. $z_{\overrightarrow{\text{AB}}} = z_{\text{B}} - z_{\text{A}} = 2\sqrt{3} - 2\text{i} - 2\sqrt{3} - 2\text{i} = -4\text{i}$ donc $\text{AB} = \left|z_{\overrightarrow{\text{AB}}}\right| = 4$;
$z_{\overrightarrow{\text{BC}}} = z_{\text{C}} - z_{\text{B}} = -4\text{i} - 2\sqrt{3} + 2\text{i} = -2\sqrt{3} - 2\text{i} = -z_{\text{A}}$ donc $\text{BC} = |z_{\overrightarrow{\text{BC}}}| = |-z_{\text{A}}| = |z_{\text{A}}| = 4$.
On a AB = BC donc ABC est isocèle en B.

3. a. D'après la question 2. b. , on déduit que : $z_{\text{A}} = 4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_{\text{B}} = 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$ donc :
$\frac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \frac{4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}}{4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6} - \text{i}\frac{\pi}{6}} = \boxed{\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}}$. Or $\text{B} = r(\text{A})$ donc $\theta = \arg\left(\frac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}}\right) = \arg\left(\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$.

b. $\text{B} = r(\text{A})$ donc OA = OB, donc OAB est isocèle en O. De plus $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = -\frac{\pi}{3}$ donc OAB est un triangle isocèle dont l'angle au sommet vaut $\frac{\pi}{3}$; conclusion : OAB est un triangle équilatéral.

c. Soit $\text{B}' = r(\text{B})$.
L'écriture complexe de la rotation est : $z' = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} z$.
Donc $z'_{\text{B}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} \times 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}} = 4\text{e}^{-\text{i}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}} = z_{\text{C}}$. donc $\text{C} = \text{B}'$, donc $\text{C} = r(\text{B})$.

d. On sait que : OA = OC = 4 (cf. question 2. c.) et que AB = 4.
De plus, $\text{B} = r(\text{A})$ et $\text{C} = r(\text{B})$. Or toute rotation conserve les distances, donc BC = AB = 4.
Finalement, dans OABC, on a : OA = AB = BC = OC = 4, donc OABC est un losange.

EXERCICE 2 — 4 points

1. Tableau complété :

Nombre de clients ayant choisi :	Bungalow avec kitchenette	Bungalow sans kitchenette	Total
Formule A	12	14	26
Formule B	6	24	30
Aucune formule de restauration	42	2	44
Total	60	40	100

2. a. Au total, 30 clients parmi les 100 ont choisi la formule B, donc
$\boxed{p(\text{E}) = \frac{30}{100} = 0,30}$.

b. Au total, 40 clients parmi les 100 ont choisi un bungalow sans kitchenette, donc $\boxed{p(\text{F}) = \frac{40}{100} = 0,40}$.

c. On a : $\text{G} = \text{E} \cup \text{F}$ donc $p(\text{G}) = p(\text{E} \cup \text{F}) = p(\text{E}) + p(\text{F}) - p(\text{E} \cap \text{F})$.
Or, il y a 24 clients sur 100 qui ont choisi la formule B et loué le bungalow sans kitchenette, donc : $p(\text{E} \cap \text{F}) = \frac{24}{100} = 0,24$.
Donc : $\boxed{p(\text{G}) = 0,30 + 0,40 - 0,24 = 0,46}$.

d. Au total, $26 + 30 = 56$ clients parmi les 100 ont choisi une formule de restauration, donc $\boxed{p(\text{H}) = \frac{56}{100} = 0,56}$.

3. a. Si le client loue un bungalow avec kitchenette et choisit :
* la formule A, il paie : 520 + 49 = 569 €
* la formule B, il paie : 520 + 154 = 674 €
* aucune formule, il paie : 520 €

Si le client loue un bungalow sans kitchenette et choisit :

* la formule A, il paie : 415 + 49 = 464 €
* la formule B, il paie : 415 + 154 = 569 €
* aucune formule, il paie : 415 €

Donc $\boxed{X \in \{415 ; 464 ; 520 ; 569 ; 674\}}$.

b. La seule façon de payer 520 € est de louer un bungalow avec kitchenette et ne pas prendre de formule de restauration. D'après le tableau de la question 1., 42 clients sur les 100 ont fait ce choix, donc

$\boxed{p(X=520)=\dfrac{42}{100}=0,42}$.

c. On procède de même pour les autres valeurs prises par X : $p(X=415)=p$(le client choisit un bungalow sans kitchen
$\frac{2}{100}=0,02$
$p(X=464)=p$(bungalow sans kitchenette et formule A) $=\frac{14}{100}=0,14$
$p(X=569)=p$(sans kitchenette et B OU avec kitchenette et A) $=\frac{24+12}{100}=0,36$
$p(X=674)=p$(avec kitchenette et B) $=\frac{6}{100}=0,06$.
D'où le tableau de loi de probabilité :

X	415	464	520	569	674
p(X)	0,02	0,14	0,42	0,36	0,06

d. E(X)$=\sum X_i p(X_i) = 0,02\times415+0,14\times464+0,42\times520+0,36\times569+0,06\times674 = \boxed{536,94 \text{ euros}}$.

e. S'il loue 16 bungalows dans ces conditions, il peut espérer la recette : $16\times$E(X) $=16\times536,94=$ $\boxed{8\,591,04 \text{ euros}}$.

Problème **10 points**

Partie A : Étude graphique et détermination d'une fonction

1. On lit : $\boxed{f(0)=4,\quad f(-1)=2}$.
2. Graphiquement, on lit :
$\boxed{f(x) \text{est négative pour } x<x_0 \text{ et pour } x>x_1, f(x) \text{ est positive pour } x_0<x<x_1.}$
3. **a.** $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 0. Cette droite est T, elle est horizontale, donc $\boxed{f'(0)=0}$.

   b. f' est positive quand f est croissante et négative quand f est décroissante.
   On lit donc : $\boxed{f'(x) \text{est positive sur} [-1;0]\ , f'(x) \text{est négative sur } [0;2]}$.

4. $$\left\{\begin{array}{ll} f(0) &=4\\ f(-1)&=2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} (0+a)\mathrm{e}^0-0+3 &=4\\ (-1+a)\mathrm{e}^{-1}+b+3&=2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a &=1\\ b+3&=2\end{array}\right. \iff \boxed{\left\{\begin{array}{ll} a&=\ 1\\ b&=-1\end{array}\right.}$$

Partie B : Étude de la fonction *f* sans utilisation graphique

1. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\mathrm{e}^{-x}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}x+1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^{X}=+\infty$;
D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2+3=-\infty$; Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty}$ $(-\infty-\infty)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ d'après les croissances comparées
$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+3 = -\infty$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}-x^2+3) = « 0+0-\infty » = \boxed{-\infty}$.

3. **a.** En se servant des formules : $(u+v)' = u'+v'$; $(uv)' = u'v+uv'$ et $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$, on obtient :
$f'(x) = 1\times e^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} - 2x = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} - 2x = -x\mathrm{e}^{-x} - 2x = \boxed{-x(\mathrm{e}^{-x}+2)}$.

b. Une exponentielle est strictement positive, donc $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $\mathrm{e}^{-x}+2 > 2 > 0$ donc $f(x) = -x(\mathrm{e}^{-x}+2)$ est du signe de $-x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

4. **a.** Sur $[1;2]$, la fonction f est dérivable et strictement décroissante de $f(1) = 2\mathrm{e}^{-1}+2 \approx 2,74$ à $f(2) = 3\mathrm{e}^{-2}-1 \approx -0,59$ et $0 \in [f(2)\,;\,f(1)]$.
Donc il existe donc une unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[1;2]$.

b. On procède par encadrements successifs :
$1 < x_1 < 2$
$f(1,5) \approx 1,37$ donc $1,5 < x_1 < 2$;
$f(1,8) \approx 0,22$ donc $1,8 < x_1 < 2$;
$f(1,9) \approx -0,18$ donc $1,8 < x_1 < 1,9$;
$f(1,85) \approx 0,03$ donc $1,85 < x_1 < 1,9$;
$f(1,86) \approx -0,01$ donc $\boxed{1,85 < x_1 < 1,86.}$

Partie C : Calcul d'une aire

1. **a.** G est définie et dérivable sur R et sa dérivée vaut (on utilise les formules $(uv)' = u'v+uv'$ et $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$) :
$G'(x) = -1\times\mathrm{e}^{-x} - (-x-2)\mathrm{e}^{-x} = (-1+x+2)e^{-x} = (x+1)\mathrm{e}^{-x} = g(x)$.
Donc G est une primitive de g sur R.

b. On en déduit que la fonction $\boxed{F(x) = (-x-2)\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{x^3}{3} + 3x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. L'unité graphique est de 2 cm, donc une unité d'aire correspond à 4 cm^2. De plus, f est positive sur $[-1\,;\,1]$.
Donc l'aire A de P est donnée par : $A = 4\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 4[F(x)]_{-1}^{1} = 4(F(1)-F(-1))$.
Or, $F(1) = -3\mathrm{e}^{-1} - \dfrac{1}{3} + 3 = \dfrac{8}{3} - 3\mathrm{e}^{-1}$ et $F(-1) = -\mathrm{e} + \dfrac{1}{3} - 3 = -\mathrm{e} - \dfrac{8}{3}$.
D'où $A = 4\left(\dfrac{8}{3} - 3\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e} + \dfrac{8}{3}\right) = \boxed{\dfrac{64}{3} - 12\mathrm{e}^{-1} + 4\mathrm{e} \approx 27,79\text{cm}^2}$.