Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Métropole 22 juin 2010
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. a. $(z-3)\left(z^2+3z+9\right)=z^3+3z^2+9z-3z^2-9z-27=z^3-27=P(z)$, ce qui valide la factorisation.

b. Dans $\mathbb{C}$, $P(z)=0 \iff (z-3)\left(z^2+3z+9\right) \iff$

$$\left\{\begin{array}{lcl} z-3 & = & 0\\ z^2+3z+9 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & 3\\ z^2+3z+9 & = & 0\end{array}\right.$$

Pour la seconde équation : $\Delta=9-36=-27=\left(3\text{i}\sqrt{3}\right)^2$.

L'équation a deux solutions imaginaires conjuguées : $\dfrac{-3+3\text{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-3-3\text{i}\sqrt{3}}{2}$.

2. On reconnaît les trois solutions de l'équation $P(z)=0$.

a. On calcule $|z_\text{B}|^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{27}{4}=\dfrac{36}{4}=9 \Rightarrow |z_\text{B}|=3$.

Comme $z_\text{C}=\overline{z_\text{B}}$ ces deux nombres complexes ont le même module : 3.

En factorisant 3, $z_\text{B}=3\left(-\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Un argument de z_B est donc $\dfrac{2\pi}{3}$.

b. Comme $z_\text{C}=\overline{z_\text{B}}$, un de ses arguments est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

On peut donc écrire $z_\text{C}=3\text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.

c. On a $|z_\text{A}|=|z_\text{B}|=|z_\text{C}|=3$, soit OA = OB = OC, donc les trois points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 3.

d. Les points B et C sont les points communs au cercle précédent Γ et à la droite d'équation $x=\dfrac{3}{2}$.

Par définition de la rotation : $z_\text{D}-z_\text{O}=\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}\left(z_\text{C}-z_\text{O}\right)$, soit

$$z_\text{D}=\left(\frac{1}{2}-\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\right)=-\frac{3}{4}-\frac{9}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}\text{i}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\text{i}=-\frac{12}{4}=-3.$$

3. a. $|z_\text{O}+3|=|3|=3$;

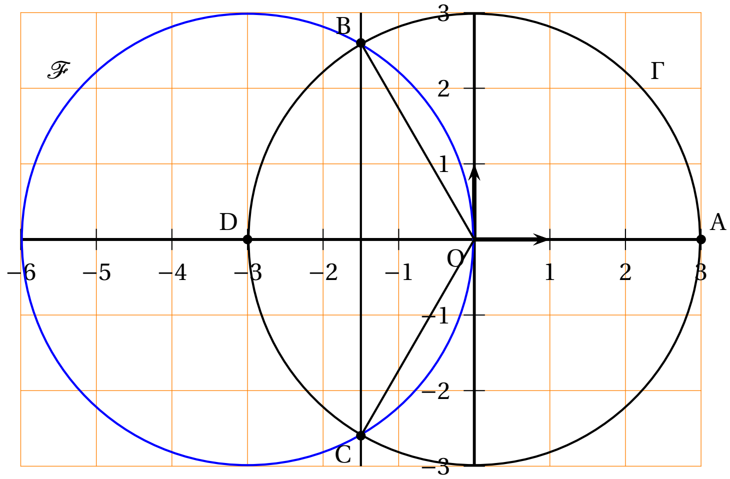
$$|z_\text{B}+3|=\left|-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}+3\right|=\left|\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{27}{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}=3;$$

$$|z_\text{C}+3|=\left|-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}+3\right|=\left|\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{27}{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}=3.$$

Les points O, B et C appartiennent à l'ensemble $\mathcal{F}$

b. Les points M d'affixe z de $\mathcal{F}$ vérifient $|z+3|=3 \iff |z-(-3)|=3 \iff \text{D}M=3$: ces points appartiennent au cercle $\mathcal{F}$ de centre D et de rayon 3.

Ce cercle $\mathcal{F}$ est le symétrique de Γ autour de la droite (BC).



Exercice 2 **5 points**

Partie A

	C seul	T seul	C et T	ni C ni T	Total
A	60	150	30	2 760	3 000
B	60	80	40	1 820	2 000
Total	120	230	70	4 580	5 000

1. La machine A produit 3 000 pièces sur 5 000 ; la probabilité est donc $\dfrac{3\,000}{5\,000} = \dfrac{3}{5}$.
2. Il y a $60 + 60 = 120$ pièces présentant le défaut C ; la probabilité cherchée est donc : $\dfrac{120}{5\,000} = 0,024$.
3. Il y a $150 + 80 = 230$ pièces présentant le défaut T ; la probabilité cherchée est donc : $\dfrac{230}{5\,000} = 0,046$.
4. Il y a $120 + 230 + 70 = 420$ pièces présentant au moins l'un des deux défauts ; la probabilité cherchée est donc : $\dfrac{420}{5\,000} = 0,084$.

Partie B

5. Le prix de revient est égal à :
$-70 \times 10 + 230 \times 0 + 15 \times 120 + 4\,580 \times 20 = 92\,700$ soit un bénéfice moyen pour 5 000 pièces produites de : $\dfrac{92\,700}{5\,000} = 18,54$ (€).

Problème **10 points**

Partie A : exploitation d'un graphique

1. On lit $g(1) = 0$. $g(1) = 0 \iff 1^3 - 1^2 + a + b = 0 \iff a + b = 0$.
2. Donner la valeur de $g'(1)$. On lit $g'(1) = \dfrac{3}{1} = 3$.
Or $g'(x) = 3x^2 - 2x + a$, donc $g'(1) = 3 \iff 3 - 2 + a = 3 \iff a = 2$

3. On a vu que $a+b=0$ et que $a=2$, donc $b=-2$.
La fonction g est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-x^2+2x-2$.
4. On sait que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $g(1)=0$, d'où :
   - $g(x)<0$ si $x<1$;
   - $g(1)=0$;
   - $g(x)>0$ si $x>1$.

Dans la suite, on admettra que : $g(x)=x^3-x^2+2x-2$.

Partie B : étude d'une fonction

$$f(x)=4\ln x+x^2-2x+1+\frac{4}{x}.$$

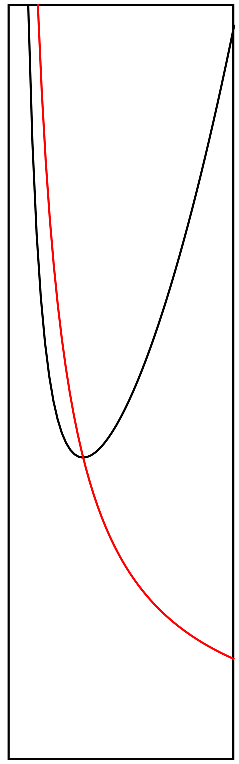
1. De $f(x)=\dfrac{1}{x}\left(4x\ln x+x^3-2x^2+x+4\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.
Géométriquement ce résultat signifie que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de zéro.
2. La fonction f somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ 5]$ est dérivable sur $]0\ ;\ 5]$ et
$f'(x)=\dfrac{4}{x}+2x-2-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}\left(4x+2x^3-2x^2-4\right)=\dfrac{2}{x^2}\left(x^3+2x-x^2-2\right)=\dfrac{2g(x)}{x^2}$. Comme $2>0$ et $x^2\geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ vu au-dessus. D'où :
   - $f'(x)<0$ si $0<x<1$;
   - $f'(1)=0$;
   - $f'(x)>0$ si $x>1$.

   D'où le tableau de variations de f :

x	0		1		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	23,24

Partie C : position relative de deux courbes

1. **a.** Avec la fenêtre $0<x<4$ et $3<y<10$:



b. La calculatrice donne un point commun de coordonnées approximatives à $(1\,;\,4)$.

c. Pour $0 < x < 1$, la courbe $\mathcal{C}$ semble être sous la courbe Γ.
Pour $1 < x < 5$, la courbe $\mathcal{C}$ semble être au dessus de la courbe Γ.

2. **a.** D'après la question précédente la fonction d s'annule lorsque les courbes $\mathcal{C}$ et Γ ont un point commun ; on peut donc proposer $x = 1$.
Or $d(1) = f(1) - \dfrac{4}{1} = 4\ln 1 + 1^2 - 2 \times 1 + 1 + \dfrac{4}{1} - \dfrac{4}{1} = 0$.

b. On a $d'(x) = f'(x) + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4}{x} + 2x - 2 - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4}{x} + 2x - 2 = 2\left(\dfrac{2}{x} + x - 1\right) = \dfrac{2}{x}\left(2 + x^2 - x\right) = \dfrac{2}{x}\left(x^2 - x + 2\right)$.
Comme sur $[0\ ;\ 5]$, $\dfrac{2}{x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x^2 - x + 2$. Or $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$. Ce trinôme n'a pas de racines : il est donc positif pour tout réel.
Conclusion : sur $[0\ ;\ 5]$, $d'(x) >$: la fonction d est donc croissante.

c. Comme d est croissante et que $d(1) = 0$, on peut en déduire :
- $d(x) < 0$ si $0 < x < 1$;
- $d(1) = 0$;
- $d(x) > 0$ si $1 < x < 5$.

d. Le résultat précédent valide bien les hypothèses faites après l'examen des deux courbes sur la calculatrice.

Partie D : calcul d'aire

1. On a $H'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.
Donc H est bien une primitive de ln sur $]0\ ;\ 5]$.

2. Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de la courbe Γ, donc l'aire, en unités d'aire $\mathscr{A}$ de la surface considérée est égale à :

$$\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{4}{x} - f(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(-4\ln x - x^2 + 2x - 1\right)\,\mathrm{d}x = \left[-4H(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$\mathscr{A} = 4 - \frac{1}{3} + 1 - 1 + 4\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{24} - 2\times\frac{1}{2} + 1 = 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{24} - 2\ln 2 + \frac{1}{4} = \frac{47}{24} - 2\ln 2 \text{ (u. a.)}$$