∽ Corrigé du baccalauréat STI Métropole & La Réunion ∾
16 septembre 2010 Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **6 points**

1. $(1+\text{i})z-3+\text{i}=0 \iff (1+\text{i})z=3-\text{i} \iff z=\dfrac{3-\text{i}}{1+\text{i}}=\dfrac{(3-\text{i})(1-\text{i})}{(1+\text{i})(1-\text{i})} \iff z=\dfrac{3-1+\text{i}(-1-3)}{1+1}=\dfrac{4-4\text{i}}{2}=2-2\text{i}$. Réponse C.
2. On a $z_0=2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$, donc $z_0^{2010}=\left(2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}\right)^{2010}=2^{2010}\text{e}^{\text{i}1050\pi}=2^{2010}$ car $1050\pi=525\times 2\pi$. Réponse A.
3. $z=-1+\text{i}$, donc $|z|^2=1+1=2 \Rightarrow |z|=\sqrt{2}$.
   $z=\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\text{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   Or $\cos\frac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{3\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc un argument de z est $\frac{3\pi}{4}$.
   Donc $z=\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$. Réponse C.
4. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{11\pi}{12}}$. Réponse B.
5. Tout point M d'affixe z a une image M' d'affixe z' telle que $z'=z\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}=z\left(\cos\frac{\pi}{6}+\text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=z\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\frac{1}{2}\right)$.
   Donc avec $z=-1+\text{i}\sqrt{3}$, $z'=\left(-1+\text{i}\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\text{i}=-\sqrt{3}+\text{i}$. Réponse A.
6. On a :
   $AB^2=|z_B-z_A|^2=|-2|^2=4$;
   $AC^2=|z_C-z_A|^2=\left|-2-2\text{i}\sqrt{3}\right|^2=4+12=16$;
   $BC^2=|z_C-z_B|^2=\left|-2\text{i}\sqrt{3}\right|^2=12$. Le triangle n'est pas isocèle et *a fortiori* équilatéral.
   D'autre part : $4+12=16 \iff AB^2+BC^2=AC^2 \iff$ ABC est rectangle en B d'après la réciproque du théorème de Pythagore. Réponse A.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Les trois boules marquées 5 ou 6 conduisent à une perte. On a donc $p_1=\dfrac{3}{10}=0,3$ et par conséquent $p_2=1-p_1=1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}=0,7$.
2. **a.** $X\in\{-5\,;\,-4\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\}$.

   b.

X	-5	-4	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1	0,1

   c. $\text{E}(X)=-5\times 0,1-4\times 0,2+0\times 0,1+1\times 0,3+2\times 0,1+3\times 0,1+4\times 0,1=-0,5-0,8+0,3+0,2+0,3+0,4=-0,10$. Sur un grand nombre de parties ce résultat signifie que le joueur perdra en moyenne 10 centimes par partie.
3. On peut par exemple remplacer la boule marquée 10 par une boule marquée 11.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. On sait que les solutions de (E) sont les fonctions définies par : $x \longmapsto f(x) = C\mathrm{e}^{2x}$, $K \in \mathbb{R}$.
2. Si g est solution de (E), $g'(x) = 2g(x) = 2K\mathrm{e}^{2x}$ et en particulier
   $g'(0) = 2K = -1 \iff K = -\dfrac{1}{2}$.
   La solution particulière est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$.

Partie B

1. Le coefficient directeur de la droite (KF) est égal à $\dfrac{6-3}{1-0} = 3$.
2. K est un point de la représentation graphique de h, donc $3 = a\mathrm{e}^{b\times 0} \iff 3 = a$.
   Le coefficient directeur de la droite (KF) est égal au nombre dérivé $h'(0)$; or $h'(x) = ab\mathrm{e}^{bx}$, donc $h'(0) = ab = 3 \iff 3b = 3 \iff b = 1$.
   Donc $h(x) = 3\mathrm{e}^{x}$.

Partie C

1. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
   b. Le résultat précédent montre que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de moins l'infini.
2. **a.** $f'(x) = 3\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{2} \times 2\mathrm{e}^{2x} = 3\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}$.
   b. En factorisant e^{x} dans l'écriture précédente :
   $f'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(3 - \mathrm{e}^{x}\right)$.
   c. Comme $\mathrm{e}^{x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - \mathrm{e}^{x}$. Or :
   — $3 - \mathrm{e}^{x} > 0 \iff \mathrm{e}^{x} < 3 \iff x < \ln 3$;
   — $3 - \mathrm{e}^{x} < 0 \iff \mathrm{e}^{x} > 3 \iff x > \ln 3$
   Donc : - sur $]-\infty\,;\,\ln 3[$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante ;
   - sur $]\ln 3\,;\,2]$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante.
   D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\ln 3$		2
$f(x)$			$\frac{9}{2}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				$3\mathrm{e}^{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{4}$

3. Le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ est égal au nombre dérivé $f'\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = 3\mathrm{e}^{\ln\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} - \frac{9}{8} = \frac{27}{8}$.
4. Il faut résoudre l'équation $f(x) = 0 \iff 3\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} = 0 \iff \mathrm{e}^{x}\left(3 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\right) = 0 \iff 3 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x} = 0$ (car $\mathrm{e}^{x} \neq 0$) $\iff 3 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x} \iff 6 = \mathrm{e}^{x} \iff \ln 6 = x$.
   Donc B$(\ln 6\,;\,0)$.
5. Voir la figure à la fin.
6. **a.** Voir la figure.

b. On a vu que f s'annule en $x = \ln 6$, donc sur l'intervalle $[0 ; \ln 6]$, la fonction est positive donc l'aire de la surface hachurée est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 3} \left[3\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]\,\mathrm{d}x = \left[3\mathrm{e}^x - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\ln 6} =$
$3\mathrm{e}^{\ln 6} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2\ln 6} - \left(3\mathrm{e}^0 - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2\times 0}\right) = 18 - 9 - 3 + \dfrac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = \dfrac{25}{4}.$

7. Comme 1 u. a. $= 2 \times 2$ cm^2, on a $\mathscr{A}(\alpha) = 2\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} - 3\right)^2$.

Il faut donc résoudre l'équation :

$$2\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} - 3\right)^2 = 8 \iff \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} - 3\right)^2 = 4 \iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} - 3 & = & 2 \\ \text{ou} & & \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} - 3 & = & -2 \end{array}\right.$$

Première équation :
$\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} - 3 = 2 \iff \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} = 3 + 2 \iff \mathrm{e}^{\alpha} = 10 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\alpha = \ln 10$.

Or $10 > 6 \Rightarrow \ln 10 > \ln 6$.

La condition $\alpha < \ln 6$ n'est pas vérifiée.

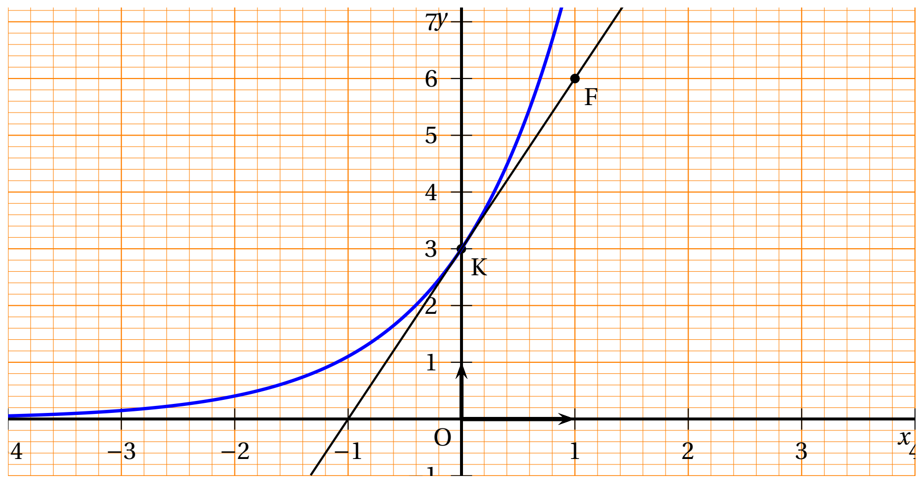
Deuxième équation :
$\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} - 3 = -2 \iff \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} = 3 - 2 \iff \mathrm{e}^{\alpha} = 2 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\alpha = \ln 2$.

Or $\ln 2 < \ln 6$, donc cette valeur est acceptée.

On a donc $\mathscr{A}(\ln 2) = 8$ cm^2.

Problème, partie B

Document annexe



Problème, partie C