Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Métropole 23 juin 2009
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** On a $|z_A|^2 = 1+3 = 4 = 2$. Donc $|z_A| = 2$.

   On factorise 2 : $z_A = 2\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

   Un argument de z_A est donc égal à $\dfrac{\pi}{3}$.

   b. $z_A = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\Pi}{3}}$.

   c. Le point A est le point d'ordonnée positive commun au cercle unitaire et à la droite $x = \frac{1}{2}$.

2. **a.** La rotation étant de centre O, on a $z_B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   b. On a donc $z_B = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   c. Le point B est le symétrique de A autour de Oy.

3. Par définition de la rotation OA = OB, le triangle est isocèle et $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$. On en déduit que ses trois angles ont la même mesure : il est donc équilatéral.

4. **a.** Le point C est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

   b. Cf. figure

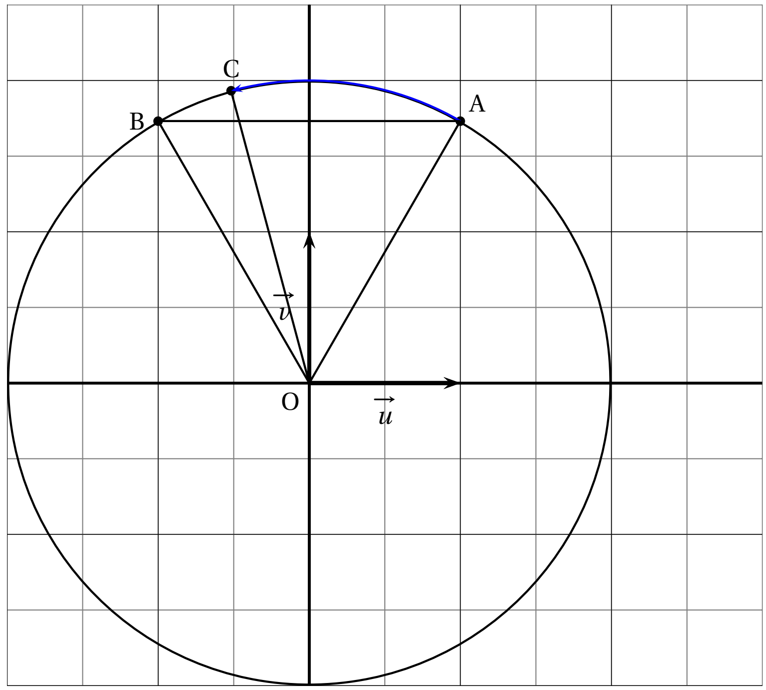
   c. $z_C = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right) = 2\cos\frac{7\pi}{12} + 2\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}$.

   d. $z_C = z_A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = z_A\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = z_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   Comme $z_A = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_C = \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

   e. Comme $z_C = 2\cos\frac{7\pi}{12} + 2\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}$, on en déduit par identification des parties réelles et imaginaires que :

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$



EXERCICE 2 **5 points**

I. Première stratégie :

1. (B, B, B), (B, B, C), (B, C, B), (B, C, C), (C, B, B), (C, B, C), (C, C, B), (C, C, C) soit huit triplets
2. $p(\text{B, B, B}) = \dfrac{1}{8} = 0,125$.
3. On considère les réponses où il n'y a qu'une seule fois la lettre C : il y a trois triplets, donc la probabilité est égale à $\dfrac{3}{8} = 0,375$.
4. **a.** Avec trois bonnes réponses : X= 6 ;
   Avec deux bonnes réponses : X= 3 ;
   Avec une bonne réponse : X= 0 ;
   Avec zéro bonne réponse : X= −3 ramenée à 0 ;

   b. Il reste à calculer la probabilité d'avoir une seule bonne réponse ou zéro ; il y a trois triplets contenant une seule fois B ou zéro B. Donc $p(\text{X} = 0 = \dfrac{3}{8} = 0,375$.
   On a donc par complément à 1 : $p(\text{X} = -3) = 1 - (0,125 + 0,375) = 1 - 0,5 = 0,5$.
   On a donc le tableau suivant :

x_i	6	3	0
$p\,(\text{X} = x_i)$	0,125	0,375	0,5

   c. $\text{E(X)} = 6 \times 0,125 + 3 \times 0,375 + 0 \times 0,5 = 1,875$.
   Conclusion : un candidat qui répond à toutes les questions au hasard aura un peu moins de 2 points sur un maximum de 6.

II. Deuxième stratégie :

1. On trouve les quatre triplets (A, B, B), (A, B, C), (A, C, B), (A, C, C)
2. **a.** Les valeurs de Y sont respectivement : 4, 2, 2, 0

b. On obtient facilement le tableau :

y_i	4	1	0
$p\left(\text{Y} = y_i\right)$	0,25	0,5	0,25

c. $\text{E(Y)} = 4 \times 0,25 + 1 \times 0,5 = 1,5$.

III. Comparaison des stratégies :
La première stratégie est meilleure que la seconde.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. g est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$g'(x) = 2\text{e}^x + 2 = 2\left(\text{e}^x + 1\right)$ qui est du signe de $\text{e}^x + 1$. Or quel que soit $x \in \mathbb{R}$,
$\text{e}^x + 1 \geqslant 1 > 0$.
La dérivée est positive, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$. Les limites ne sont pas demandées.
2. **a.** On a $g(-2) = 2\text{e}^{x-2} - 4 + 3 \approx -0,7$ et $g(-1) = 2\text{e}^{-1} - 2 + 3 \approx 1,7$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires il en résulte que la fonction g croissante s'annule une fois sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$ pour α tel que $g(\alpha) = 0$ et $-2 < \alpha < -1$.
b. Comme pour la question précédente, comme $g(-1,69) \approx -0,011$ et $g(-1,68) \approx 0,013$, on en déduit que $\alpha \approx -1,7$ au dixième près.
c. On a donc :
— sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$, $g(x) < 0$;
— $g(\alpha) = 0$;
— sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{e}^x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \text{e}^x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
3. **a.** $f(x) - \left(x^2 + 3x\right) = 2\text{e}^x$, donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) - \left(x^2 + 3x\right) = 0$.
b. On en déduit qu'au voisinage de moins l'infini la courbe $\mathcal{C}$ et la parabole sont asymptotes.
c. On a vu que $f(x) - \left(x^2 + 3x\right) = 2\text{e}^x$ et comme $2\text{e}^x > 0$, que que soit le réel x, on en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus se la parabole.
4. **a.** f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et $f'(x) = 2\text{e}^x + 2x + 3 = g(x)$.
b. le signe de f' est celui de g vu à la question **2. c.**. D'où :
— sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$, $f'(x) < 0$; f est décroissante ;
— $f'(\alpha) = 0$; α est un extremum de f ;
— sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$; f est croissante.
c. On a $f(-1.69) \approx -1,844860$ et $f(-1,68) \approx -1,844852$.
Donc $(\alpha) \approx -1,7$ à 10^{-1} près.
5. $M(x\ ;\ y) \in \text{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0 \iff y - 2 = 5x \iff y = 5x + 2$.
6.

Partie C : Calcul d'aire

1. Cf. figure.

2. a. Comme $f(0) = 2 > 0$ et que f est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, il en résulte que f est positive sur cet intervalle.

L'aire de la partie hachurée est donc égale à l'intégrale $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. On a donc $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(2\mathrm{e}^x + x^2 + 3x\right)\mathrm{d}x = \left[2\mathrm{e}^x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{3}{8} - 2 = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - \dfrac{38}{24} = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - \dfrac{19}{12}$. (en unités d'aire)

L'unité graphique étant de 2cm, l'unité d'aire est égale à 4 cm^2.

Donc en cm^2, $\mathrm{A} = 4\left(2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - \dfrac{19}{12}\right) \approx 6,856$.

Au centième près de cm^2, $\mathscr{A} \approx 6,86$.

ANNEXE

Cette feuille est à rendre avec la copie