Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Méropole 21 juin 2012 Génie électronique, électrotechnique, optique

Exercice 1 **5 points**

Partie A

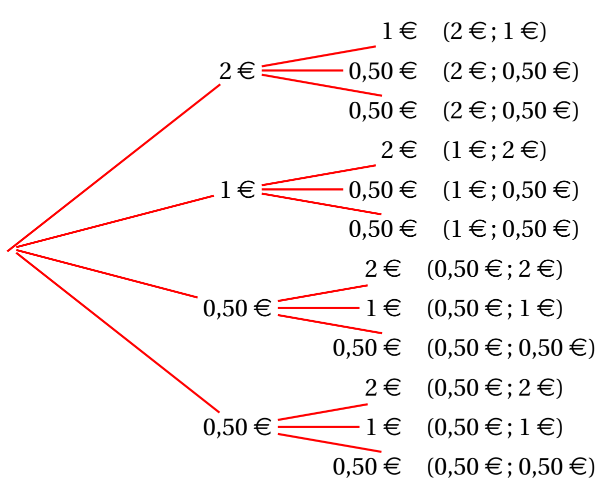
1. L'écriture exponentielle de $-2+2\text{i}$ est :
$|-2+2\text{i}|^2 = 4+4 = 4\times 2$, donc $|-2+2\text{i}| = 2\sqrt{2}$.
$-2+2\text{i} = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+\text{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$. Réponse **d.**
2. La transformation qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = z + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est :
Réponse **b.**
3. Soient A, B, C et D les points d'affixes $z_{\text{A}} = 1+\text{i}$, $z_{\text{B}} = 3-2\text{i}$, $z_{\text{C}} = 4$ et $z_{\text{D}} = 2+3\text{i}$. Une figure permet de conjecturer que l'affirmation **b.** est vraie :
$\text{OB}^2 = 9+4 = 13$; $\text{OD}^2 = 4+9 = 13$ et $\text{BD}^2 = (-1)^2+5^2 = 26$.
Comme $13+13 = 26 \iff \text{OB}^2+\text{OD}^2 = \text{BD}^2 \iff$ OBD est rectangle en O d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le point O appartient au cercle de diamètre [BD].

Partie B

1. Réponse : **b.**, vérification immédiate.
2. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $x \longmapsto C\text{e}^{-2x}$, avec $C \in \mathbb{R}$. La droite et la parabole ne peuvent convenir et la troisième est périodique ce qui n'est pas possible. Reste la solution **b.** et la solution est $x \longmapsto \text{e}^{-2x}$ car $y(0) = 1$ entraîne $C = 1$.

Exercice 2 **5 points**

1.



Il y a 12 issues possibles.

2. Il y a 10 issues sur 12 comprenant des termes différents, donc $p(\text{A}) = \dfrac{10}{2} = \dfrac{5}{6}$.

3. **a.** On obtient comme sommes : 3, 2,50, 1,50, 1 €.

b. Les sommes précédentes sortent respectivement 2 ; 4 ; 4 ; 2 fois d'où le tableau de la loi de probabilité de S

S	3	2,50	1,50	1
$p(S = s_i)$	$\dfrac{2}{12}$	$\dfrac{4}{12}$	$\dfrac{4}{12}$	$\dfrac{2}{12}$

c. On a $\text{E}(S) = 3 \times \dfrac{2}{12} + 2,50 \times \dfrac{4}{12} + 1,50 \times \dfrac{4}{12} + 1 \times \dfrac{2}{12} = \dfrac{6+10+6+2}{12} = \dfrac{24}{12} = 2$ €.
Ceci signifie qu'en moyenne sur un grand de parties la somme moyenne obtenue sera voisine de 2 €.

4. Il y a $4+4+2 = 10$ issues donnant une somme supérieure à 1,30 €. La probabilité de l'évènement B est donc égale à :
$p(\text{B}) = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Étude graphique d'une inéquation

Le graphique permet de conjecturer que, pour tout nombre réel x strictement positif la parabole est au dessus de la courbe représentant la fonction logarithme népérien, soit
$\dfrac{1}{2}x^2 + 1 > \ln x \iff \dfrac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x > 0$.

Partie B : Calculatrice et conjectures

1. Les points de coordonnées $(0\,;\,-2)$ et $(2\,;\,1)$ appartiennent à la droite Δ_2.

2. **a.** La fonction f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

b. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

c. Δ_1 semble être asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

d. Δ_2 semble être la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Partie C : Vérification des conjectures

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}x - 1 = +\infty$, d'où par somme de limites :
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{2}x - 1 = -1$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, d'où par somme de limites :
$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

2. **a.** f est une somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et en dérivant le quotient

$$f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1 - \ln x}{x^2}.$$

b. En factorisant $\dfrac{1}{x^2}$ on obtient :

$$f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x\right).$$

c. Comme $\dfrac{1}{x^2} > 0$, quel que soit le réel x supérieur à zéro, le signe de $f'(x)$ est celui du facteur $\dfrac{1}{2}x^2+1-\ln x$. Or on a admis que ce nombre est supérieur à zéro. Conclusion : quel que soit $x \in]0~;~+\infty[$, $f'(x) > 0$; on en déduit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

3. a. On a $f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x-1\right) = \dfrac{1}{2}x-1+\dfrac{\ln x}{x}-\left(\dfrac{1}{2}x-1\right) = -1+\dfrac{\ln x}{x}+1 = \dfrac{\ln x}{x}$.

Or, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)\right] = 0$.

b. Géométriquement le résultat précédent signifie que la droite Δ_1 est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

c. On a vu que $f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x-1\right) == -1+\dfrac{\ln x}{x}+1 = \dfrac{\ln x}{x}$. Le signe de cette différence est celui de $\ln x$ puisque $x > 0$. Donc :

- $\ln x > 0 \iff x > 1 : f(x) > \dfrac{1}{2}x-1$; la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de son asymptote.
- $\ln x = 0 \iff x = 1 : f(1) = \dfrac{1}{2}\times 1-1$; la courbe $\mathscr{C}$ et son asymptote ont un point commun.
- $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1 : f(x) < \dfrac{1}{2}x-1$; la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de son asymptote.

d. On a $f'(1) = \dfrac{1}{1^2}\left(\dfrac{1}{2}\times 1^2+1-\ln 1\right) = \dfrac{3}{2}$.

D'autre part $f(1) = \dfrac{1}{2}\times 1-1+\dfrac{\ln 1}{1} = -\dfrac{1}{2}$.

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ est $y-f(1) = f'(1)(x-1)$, soit

$y+\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}(x-1) \iff y = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}x-2$: c'est bien l'équation de Δ_2.

Partie D : Calcul d'aire

1. Sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, G est dérivable et sur cet intervalle :

$G'(x) = 2\times\dfrac{1}{2}(\ln x)\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x}{x} = g(x)$.

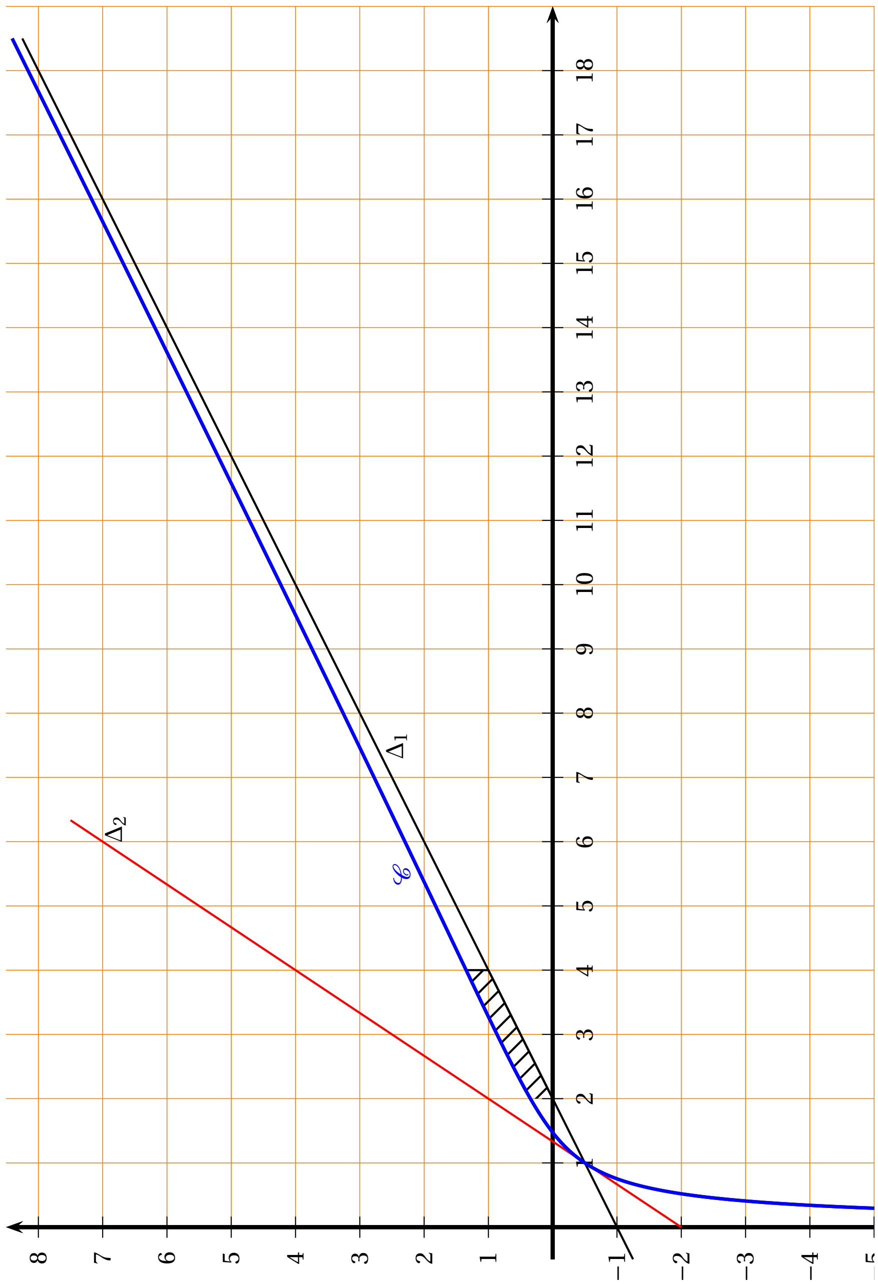
Ce dernier résultat montre que G est une primitive de g sur $]0~;~+\infty[$

2. On a vu que pour $x > 1$ et a fortiori sur $[2;4]$, la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite Δ_1, donc l'aire de la surface hachurée est égale (en unité d'aire) à l'intégrale :

$\displaystyle\int_2^4 f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)\,\mathrm{d}x = \int_2^4\dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 g(x)\,\mathrm{d}x = G(4)-G(2) = \dfrac{1}{2}(\ln 4)^2-\dfrac{1}{2}(\ln 2)^2$.

Or $\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2$, donc l'aire de la surface hachurée est égale à :

$\dfrac{1}{2}(2\ln 2)^2-\dfrac{1}{2}(\ln 2)^2 = 2(\ln 2)^2-\dfrac{1}{2}(\ln 2)^2 = \dfrac{3}{2}(\ln 2)^2 \approx 0,72$ (u. a.).


Δ_1
Δ_2
$\mathscr{C}$