Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat STI Métropole 13 septembre 2012 ∾ Génie électronique, électrotechnique & optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. Première équation : $\mathrm{i}\left(-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}=-\mathrm{i}\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}=-2\mathrm{i}\sqrt{2}\neq 0$
Deuxième équation : $\mathrm{i}\left(-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}=-\mathrm{i}\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}=-2\sqrt{2}\neq 0$;
Troisième équation : $\mathrm{i}\left(-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}=-\mathrm{i}\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}=0$. Réponse **c.**
2. Première équation : $\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)+4=1-3+2\mathrm{i}\sqrt{3}+2+2\mathrm{i}\sqrt{3}+4=4+4\mathrm{i}\sqrt{3}\neq 0$;
Deuxième équation : $\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2+2\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)+4=1-3+2\mathrm{i}\sqrt{3}-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}+4=0$.
Troisième équation : $\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)-4=1-3+2\mathrm{i}\sqrt{3}+2+2\mathrm{i}\sqrt{3}-4=4\mathrm{i}\sqrt{3}-4\neq 0$.
Réponse **b.**
3. L'écriture exponentielle du nombre complexe z_{B} est :
On a $|z_{\mathrm{B}}|^2=1+3=4=2^2$, donc $|z_{\mathrm{B}}|=2$;
Donc $z_{\mathrm{B}}=2\left(-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{-2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{-2\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Réponse **b.**
4. De même $z_{\mathrm{A}=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.
On a donc OA = OB : le triangle OAB est isocèle mais pas équilatéral. Réponse **c.**
5. On a $z_{\mathrm{B}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{6}}=-2\mathrm{i}$.
Réponse **a.**

EXERCICE 2 **4 points**

1. On a $p(C)=\dfrac{800}{2\,000}=\dfrac{8}{20}=0,4$.
$p(F)=\dfrac{300}{2\,000}=\dfrac{3}{20}=0,15$.
$p(G)=\dfrac{100+40+300+300+200}{2\,000}=\dfrac{940}{2\,000}=\dfrac{94}{200}=0,47$.
$p(H)=\dfrac{2\,000-(100+40+300)}{2\,000}=\dfrac{1\,560}{2\,000}=\dfrac{156}{200}=\dfrac{78}{100}=0,78$.
2. **a.** X peut prendre les valeurs : 0,5 ; 1 et 2.
b. On a $p(X=0,5)=\dfrac{440}{2\,000}=\dfrac{44}{200}=0,22$;
$p(X=1)=\dfrac{900}{2\,000}=0,45$ et
$p(X=2)=\dfrac{660}{2\,000}=\dfrac{66}{200}=\dfrac{33}{100}=0,33$.
c. On a $E(X)=0,5\times 0,22+1\times 0,45+2\times 0,33=0,11+0,45+0,66=1,22$ (h)

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=x^2\ln x-\frac{3}{2}x^2+2x$$

On désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = 2x\ln x - 2x + 2.$$

1. On a $g'(x) = 2\ln x + 2x \times \dfrac{1}{x} - 2 = 2\ln x + 2 - 2 = 2\ln x$.

2. On sait que la fonction $x \longmapsto \ln x$ est croissante sur $]0~;~+\infty[$ de $-\infty$ à $+\infty[$ en s'annulant pour $x = 1$.
- sur $]0~;~1[$, $\ln x < 0$, donc $g'(x) < 0$: la fonction g est décroissante;
- sur $]1~;~+\infty[$, $\ln x > 0$, donc $g'(x) > 0$: la fonction g est croissante;
- $g'(1) = 0$: $g(1) = 2 \times 1 \times \ln 1 - 2 \times +2 = 0$ est donc le minium de la fonction g sur $]0~;~+\infty[$.

3. Puisque le minimum de g est 0, la fonction g est donc positive. Sur $]0~;~+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

Partie B : étude de la fonction *f*

1. a. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\ln x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} 2x = 0$, on obtient par somme de limites que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

b. En factorisant x^2, on a :
$f(x) = x^2\left(\ln x - \dfrac{3}{2}\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{2x}{x^2}\right) = x^2\left(\ln x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{x}\right)$.

c. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, on obtient par somme de limites que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. Sur $]0~;~+\infty[$, on a : $f'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} - 2 = 2x\ln x + x - 2 = g(x)$.

b. On a vu dans la partie A que $g(x) \geqslant 0$, donc que $f'(x) \geqslant 0$: la fonction f est donc croissante de 0 à plus l'infini.

Partie C : position relative de deux courbes et calcul d'aire

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = x^2\ln x$.

1. a. Soit d la fonction définie par :
$d(x) = f(x) - x^2\ln x = x^2\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - x^2\ln x = -\dfrac{3}{2}x^2 + 2x = \dfrac{x}{2}(-3x + 4)$.

b. Puisque $x > 0$, le signe de $d(x)$ est celui de la différence $-3x + 4$:

c.
- $-3x + 4 > 0 \iff 4 > 3x \iff \dfrac{4}{3} > x$: sur $\left]0~;~\dfrac{4}{3}\right[$, $d(x) > 0$: géométriquement Γ est au dessus de $\mathcal{C}$;
- $-3x + 4 < 0 \iff 4 < 3x \iff \dfrac{4}{3} < x$: sur $\left]\dfrac{4}{3}~;~+\infty\right[$, $d(x) < 0$: géométriquement Γ est au dessous de $\mathcal{C}$;
- pour $x = \dfrac{4}{3}$, les courbes ont un point commun d'ordonnée $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 \ln\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{16}{9}\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$.

2. D'après la question précédente M est au dessous de N.

a. Voir à la fin le graphique.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Il faut résoudre l'équation $d(x) = 10 \iff -\dfrac{3}{2}x^2 + 2x = 10 \iff -3x^2 + 4x = 20 \iff$ $3x^2 - 4x + 20 = 0$.

On a $\Delta = 16 + 240 = 256 = 16^2$: l'équation a donc deux solutions :

$x_1 = \dfrac{4+16}{2\times 3} = \dfrac{10}{3}$ et $x_2 = \dfrac{4-16}{2\times 3} = -2$.

La distance MN sera supérieure à 10 si $x \geqslant \dfrac{10}{3}$. Voir la figure.

3. **a.** Voir la figure.

b. $\mathscr{A}$ est la différence de l'aire de la surface limitée par Γ, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = \dfrac{4}{3}$ et $x = 3$ et l'aire de la surface limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = \dfrac{4}{3}$ et $x = 3$. Donc

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{4}{3}}^{3} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{4}{3}}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{4}{3}}^{3} \left(\dfrac{3}{2}x^2 - 2x\right)\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{2}x^3 - x^2\right]_{\frac{4}{3}}^{3} = \dfrac{27}{2} - 9 - \left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{64}{27} - \dfrac{16}{9}\right) =$ $\dfrac{27}{2} - 9 - \dfrac{32}{27} + \dfrac{16}{9} = \dfrac{729 - 486 - 64 + 96}{54} = \dfrac{275}{54} \approx 5,09$ (unités d'aire).

ANNEXE

À RENDRE AVEC LA COPIE