Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Polynésie juin 2010
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. On a $\Delta = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 4 = 12 - 16 = -4 = (4\mathrm{i})^2$.
L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}}{2} = \sqrt{3} + \mathrm{i} \text{ et } z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}.$$

2. a. On a $|z_1|^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_1| = 2$.
En factorisant :
$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{+}\mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$.
Un argument de z_1 est donc $\frac{\pi}{6}$.
Comme $z_2 = \overline{z_1}$, on a $|z_2| = 2$ et un argument de z_2 est $-\frac{\pi}{6}$.
Enfin $|z_3| = 2$ et un argument de z_3 est $\frac{\pi}{2}$.

b. Les points A et B sont les points communs au cercle de centre O et de rayon 2 avec la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. Voir plus bas

c. $\frac{z_3}{z_2} = \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3} - \mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}(\sqrt{3} + \mathrm{i})}{(\sqrt{3} + \mathrm{i})(\sqrt{3} - \mathrm{i})} = \frac{2\mathrm{i}\sqrt{3} - 2}{3 + 1} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ou encore en utilisant les résultats de la question précédente :
$z_3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$;
$z_2 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$;
donc $\frac{z_3}{z_2} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{4\pi}{6}\right)} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

d. On a donc $\frac{z_3}{z_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
Donc $z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} z_2$ ce qui montre que C est l'image de B dans la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

3. Soit

a. O est le milieu de [AE], ce qui se traduit par $0 = \frac{\sqrt{3} + \mathrm{i} + z_{\mathrm{E}}}{2} \iff z_{\mathrm{E}} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

b. L'image du point C par la rotation R a une affixe égale à :
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}(2\mathrm{i}) = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2\mathrm{i}) = -\sqrt{3} - \mathrm{i} = z_{\mathrm{E}}$

4. On a $\mathrm{BE} = |z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{B}}| = |-\sqrt{3} - \mathrm{i} - \sqrt{3} + \mathrm{i}| = |2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$;
$\mathrm{BC} = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}| = |2\mathrm{i} - \sqrt{3} + \mathrm{i}| = |-\sqrt{3} + 3\mathrm{i}| = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;
$\mathrm{CE} = |z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{C}}| = |-\sqrt{3} - \mathrm{i} - 2\mathrm{i}| = |-\sqrt{3} - 3\mathrm{i}| = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;
On a donc BE = BC = CE : le triangle BEC est équilatéral.

☞ On aurait pu également dire que les triangles OBC, OCE et OEB sont des triangles isocèles (côtés de longueurs 2) avec un angle au sommet de $\dfrac{2\pi}{3}$: ils sont donc superposables et BE = BC = CE : le triangle BEC est équilatéral.

EXERCICE 2 **4 points**

1. L'équation $9r^2+1=0$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$: $\dfrac{1}{3}\text{i}$ et $-\dfrac{1}{3}\text{i}$.
On sait que la forme générale d'une solution de (E) est :
$f(x)=A\cos\left(\frac{x}{3}\right)+B\sin\left(\frac{x}{3}\right),\ A\in\mathbb{R},\ B\in\mathbb{R}$;

2. **a.** Si $f(x)=A\cos\left(\frac{x}{3}\right)+B\sin\left(\frac{x}{3}\right)$, alors $f'(x)=\dfrac{1}{3}A\sin\left(\frac{x}{3}\right)+\dfrac{1}{3}B\cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

Donc $\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & \dfrac{1}{2}\\ f'(0) & = & -\dfrac{\sqrt{3}}{6}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{3}B & = & -\dfrac{\sqrt{3}}{6}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & \dfrac{1}{2}\\ B & = & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$.

On a donc $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{3}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

b. On peut alors écrire :
$f(x)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{3}\right)=\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)$
d'après l'identité $\sin a\cos b+\cos a\sin b=\sin(a+b)$.

3. **a.** $\left[f(x)\right]^2=\sin^2\left(\frac{x}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)$.

On sait que $\cos 2a=1-2\sin^2 a \iff \sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$.

Donc $\left[f(x)\right]^2=\dfrac{1-\cos 2\left(\frac{x}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}{2}=\dfrac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2x}{3}+\frac{5\pi}{3}\right)\right]$.

b. On a donc $E^2=\dfrac{1}{6\pi}\displaystyle\int_0^{6\pi}\dfrac{1}{2}\left[1-\cos\left(\dfrac{2x}{3}+\dfrac{5\pi}{3}\right)\right]\,\text{d}x=\dfrac{1}{12\pi}\left[x-\dfrac{3}{2}\sin\left(\dfrac{2x}{3}+\dfrac{5\pi}{3}\right)\right]_0^{6\pi}=$
$\dfrac{1}{6\pi}\left[6\pi-\dfrac{3}{2}\sin\left(4\pi+\dfrac{5\pi}{3}\right)-0+\dfrac{3}{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)\right]=\dfrac{1}{12\pi}\times 6\pi=\dfrac{1}{2}$.

$$E=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. On lit $g(0)=3$ et $g'(0)=\dfrac{-3}{3}=-1$.

2. **a.** $g'(x)=\text{e}^x+a$

b. On a $\left\{\begin{array}{lcl} g(0) & = & 3\\ g'(0) & = & -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1+b & = & 3\\ 1+a & = & -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b & = & 2\\ a & = & -2\end{array}\right.$

Donc $g(x)=\text{e}^x-2x+2,\ x\in\mathbb{R}$.

3. **a.** On a donc $g'(x)=\text{e}^x-2,\ x\in\mathbb{R}$.
Or $\text{e}^x-2>0 \iff \text{e}^x>2 \iff x>\ln 2$, par croissance de la fonction ln. Donc g est croissante sur $[\ln 2\ ;\ +\infty[$.
De même on montre que g est décroissante sur $]-\infty\ ;\ \ln 2[$.
$g(\ln 2)=\text{e}^{\ln 2}-2\ln 2+2=4-2\ln 2\approx 2,614$ est l'extremum (minimum) de la fonction.

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$4-2\ln 2$	$\nearrow$

b. Le minimum étant supérieur à zéro, il en résulte que $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

c. Graphiquement la courbe Γ est au dessus de l'axe des abscisses.

Partie B

1. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+2\text{e}^{-x}\right) = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+2\text{e}^{-x}\right) = 1$ et finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $d(x) = f(x) - x = x + 2x\text{e}^{-x} = 2x\text{e}^{-x}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\text{e}^{-x} = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x) = 0$, ce qui montre que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à Γ au voisinage de plus l'infini.

c. On a vu que $d(x) = 2x\text{e}^{-x}$. Comme $\text{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x on en déduit :

- si $x < 0$, alors Γ est en dessous de D ;
- si $x > 0$, alors Γ est au dessus de D.

Γ et D sont sécantes lorsque $d(x) = 0 \iff 2x\text{e}^{-x} = 0 \iff x = 0$.
Le seul point commun aux deux courbes est l'origine.

3. a. $f'(x) = 1 + 2\text{e}^{-x} - 2x\text{e}^{-x} = \text{e}^{-x}\left(\text{e}^{x} + 2 - 2x\right) = \text{e}^{-x}\left(\text{e}^{x} - 2x + 2\right) = \text{e}^{-x}g(x)$.

b. Comme $\text{e}^{-x} >$ et comme d'après la partie A, $g(x) > 0$, il en résulte que $f'(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

c.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

4. $M(x\,;\,y) \in \text{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x-0) \iff y - 0 = 3(x-0) \iff y = 3x$.

5. Voir plus bas.

Partie B

1. Voir plus bas.

2. On a $H'(x) = -2\text{e}^{-x} - 2(-x-1)\text{e}^{-x} = -2\text{e}^{-x} + 2x\text{e}^{-x} + 2\text{e}^{-x} = 2x\text{e}^{-x} = h(x)$.
Donc $H(x)$ est une primitive de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. On a vu que pour $x > 0$, $f(x) > x$, autrement dit la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de D, donc l'aire (en unités d'aire) de la surface hachurée est égale à l'intégrale :

$$\int_0^2 [f(x) - x]\,\text{d}x = \int_0^2 2x\text{e}^{-x}\,\text{d}x = [H(x)]_0^2 = H(2) - H(0) = -6\text{e}^{-2} + 2$$

(u. a.)
L'unité d'aire est égale à $2 \times 1 = 2\ \text{cm}^2$.
Donc $\mathscr{A} = 2\left(2 - 6\text{e}^{-2}\right) \approx 2,375 \approx 2,38\ \text{cm}^2$

Annexe (problème - partie B)