Durée : 4 heures

Correction du baccalauréat STI La Réunion juin 2010

Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. On a $\Delta = 16 - 4 \times 13 = -36 = (6\text{i})^2$.
L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{-4+6\text{i}}{2} = -2+3\text{i}\ ;\ -2-3\text{i}.$$

2. **a.** Voir la figure.

b. $\dfrac{z_{\text{C}}}{z_{\text{A}}} = \dfrac{3-2\text{i}}{-2-3\text{i}} = \dfrac{(3-2\text{i})(-2+3\text{i})}{(-2-3\text{i})(-2+3\text{i})} == \dfrac{-6+6+9\text{i}+4\text{i}}{4+9} = \dfrac{13\text{i}}{13} = \text{i}.$

c. $\dfrac{z_{\text{C}}}{z_{\text{A}}} = \text{i} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$

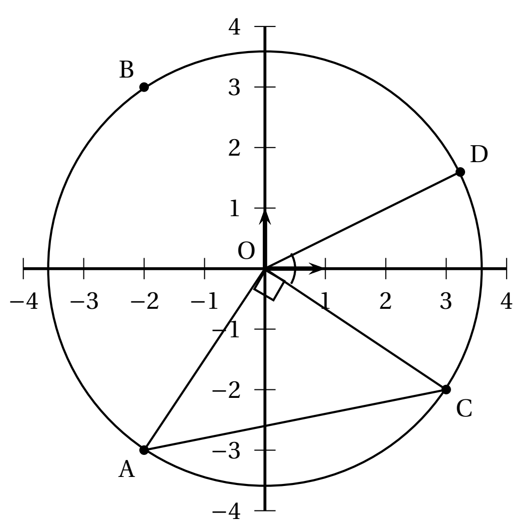
d. D'après le résultat précédent, on a :
$z_{\text{C}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} z_{\text{A}}$; cette égalité montre que le point C est l'image du point A dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Par définition de la rotation
OA = OC ; le triangle OAC est donc un triangle rectangle isocèle en O.

3. **a.** Voir figure : on construit le triangle équilatéral OCD.

b. Par définition de la rotation :
$z_{\text{D}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} z_{\text{C}} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) z_{\text{C}} = \left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(3-2\text{i}) = \dfrac{3}{2} + \sqrt{3} - \text{i} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\text{i} =$

$\dfrac{3}{2} + \sqrt{3} + \text{i}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right).$

4.



On a de façon évidente $|z_{\text{A}}| = |z_{\text{B}}| = |z_{\text{C}}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
Par définition de la rotation OC = OD = $\sqrt{13}$.
Conclusion : A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{13}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

1. Il y a 184 pièces conformes sur 200, donc une probabilité de $\dfrac{184}{200} = \dfrac{920}{1000} = 0,92$.
2. Il y a $5+9 = 14$ de diamètre inférieur à 3,5 mm, donc la probabilité est égale à $\dfrac{400-14}{400} = \dfrac{386}{400} = 0,965$.
3. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est :
$\mathrm{E}(X) = -0,05 \times 0,035 + 0 \times 0,8925 + 0,05 \times 0,0625 + 0,1 \times 0,01 = 0,002375$.

Partie B

1. La seule solution est $x \longmapsto \mathrm{e}^{-3x} + 2x + 1$
2. Les solutions de l'équation $r^2 + 9 = 0$ sont 3i et -3i. On sait qu'alors la forme générale d'une solution est $f(x) = A\cos 3x + B\sin 3x$.
Seule la troisième fonction est de cette forme.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. **a.** On lit $f(1) = -1$ et $f'(1) = 0$.
b. La pente de la droite (AB) est égale à : $\dfrac{0-(\ln 2-2)}{-4\ln 2+8-0} = \dfrac{2-\ln 2}{-4\ln 2+8} = \dfrac{2-\ln 2}{4(2\ln 2} = \dfrac{1}{4}$.
Puisque (AB) est tangente à la courbe au point d'abscisse 2, on a $f'(2) = \dfrac{1}{4} = 0,25$.
2. **a.** f somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :
$f'(x) = \dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{x^2} = \dfrac{ax-b}{x^2}$.
b. En traduisant numériquement la question 1. et la question 2. a. on obtient :
$\left\{\begin{array}{r c r} f(1) & = & -1\\ f'(1) & = & 0\\ f'(2) & = & \dfrac{1}{4}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r c r} b+c & = & -1\\ a-b & = & 0\\ \dfrac{2a-b}{4} & = & \dfrac{1}{4}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r c r l} b+c & = & -1 & (1)\\ a-b & = & 0 & (2)\\ 2a-b & = & 1 & (3)\end{array}\right.$.
c. Par calcul de la différence (3) - (2), on obtient $a = 1$ puis en remplaçant dans (2) $b = 1$ et enfin en remplaçant dans (1) $c = -2$.
On a donc : $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - 2$.

Partie B

1. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Ceci signifie que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.
3. La fonction f est la somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$; elle est donc dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et :
$f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$ qui est du signe de $x-1$, car $x^2 > 0$.
Donc si $x > 1$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante sur $]1~;~+\infty[$.
Si $x < 1$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur $]0~;~1[$.

4. Sur l'intervalle $[6\,;7]$, la fonction f est croissante; de plus :
$f(6) = \ln 6 + \dfrac{1}{6} - 2 \approx -0,04$;
$f(7) = \ln 7 + \dfrac{1}{7} - 2 \approx 0,14$.
Il existe donc un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$ avec $6 < \alpha < 7$.
De même $f(6,3) \approx -0,0007$ et $f(6,4) \approx 0,01$, donc $6,3 < \alpha < 6,4$.
Enfin $f(6,30) \approx -0,0007$ et $f(6,31) \approx 0,0006$, donc $6{,}30 < \alpha < 6,31$.

Partie C

1. Les points communs aux deux courbes ont une abscisse x qui vérifie :
$f(x) = \ln x \iff \ln x + \dfrac{1}{x} - 2 = \ln x \iff \dfrac{1}{x} = 2 \iff x = \dfrac{1}{2}$.
Pour cette abscisse l'ordonnée commune est égale à $\ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$.
Les deux courbes ont un seul point commun de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2\ ;\ -\ln 2}\right)$.

2. Soit d la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :
$d(x) = f(x) - \ln x = \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{1-2x}{x}$
Comme $x > 0$, $d(x)$ est du signe de $1 - 2x$.
D'où : si $x < \dfrac{1}{2}$, $d(x) > 0$, ce qui signifie que $\mathscr{C}$ est au dessus de Γ.
Si $x > \dfrac{1}{2}$, $d(x) < 0$, ce qui signifie que $\mathscr{C}$ est au dessous de Γ.

3. Voir plus bas.

4. **a.** Voir plus bas

b. Sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, on a vu que $\mathscr{C}$ est au dessous de Γ; donc l'aire en unités d'aire de la partie hachurée est égale à l'intégrale :

$$\int_1^2 [\ln x - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[-\frac{1}{x} + 2\right]\,\mathrm{d}x = [-\ln x + 2x]_1^2 = -\ln 2 + 4 + \ln 1 - 2 = 2 - \ln 2.$$

c. La calculatrice donne : $\mathscr{A} \approx 1{,}30\ \text{cm}^2$

Problème

Annexe, à rendre avec la copie