Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie électronique, optique, électrotechnique Métropole juin 2006

Exercice 1 **5 points**

1. On a $\Delta = (-2)^2 - 4\times 4 = 4 - 16 = -12 = \left(2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$: l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$S = \left\{\frac{2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3},\quad 1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$$

2. **a.** On a $|z_A|^2 = 1+3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_A| = 2$.

   On a donc : $z_A = 2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Un argument de z_A est donc $\frac{\pi}{3}$.

   z_B étant le conjugué de z_A son module est égal à 2 et un de ses arguments est $-\frac{\pi}{3}$.

   b. $z_A = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$.

   c. Voir le dessin à la fin de l'exercice.

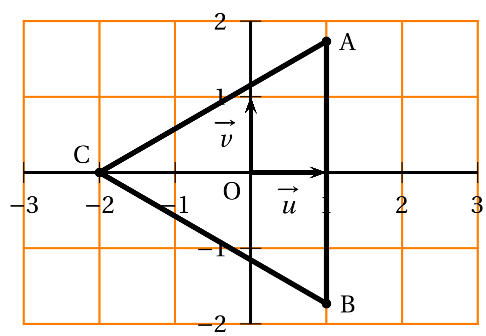
3. **a.** R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

   b. D'après la définition de la rotation :
   $z_C = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right]} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -2$.

   c. Voir la figure.

   d. Soit C′ l'image de C par R. On a par définition de R :
   $z_{C'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} z_C = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{3}} = z_B$.
   Donc B est l'image par R de C.

4. Utilisons les propriétés de la rotation de conserver les distances :
   On a R(A) = C et R(C) = B, donc la distance de deux points étant égale à celle de leurs images : AC = CB et par définition $\widehat{ACB} = 60°$. Le triangle ACB est donc isocèle avec un angle au sommet de 60 °, les deux autres angles mesurent aussi 60°, donc ACB est un triangle équilatéral.



Exercice 2 **4 points**

1. Étude du gain d'un joueur pour une mise de 10 euros.

a.

Roue n° 2 \ Roue n° 1	10	0	5	0
0	20	10	15	10
0	10	0	5	0
5	15	5	10	5
0	10	0	5	0

b. Sur les 16 issues, 8 donnent un gain supérieur ou égal à 10 € ; la probabilité est donc égale à $\dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{50}{100} = 50\,\%$.

c.

g_i	0	5	10	15	20
$p(G = g_i)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

d. $p(G > 10) = p(G = 15) + p(G = 20) = \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$.

e. On a $E(G) = 0 \times \frac{4}{16} + 5 \times \frac{4}{16} + 10 \times \frac{5}{16} + 15 \times \frac{2}{16} + 20 \times \frac{1}{16} = \frac{20+50+30+20}{16} = \dfrac{120}{16} = \dfrac{30}{4} = \dfrac{15}{2} = 7,5$.

Sur un grand nombre de parties, le gain moyen par partie est de 7,50 €.

2. Étude du bénéfice de l'association pour une valse de m euros.

a. On a $E(B) = (m-0) \times \frac{4}{16} + (m-5) \times \frac{4}{16} + (m-10) \times \frac{5}{16} + (m-15) \times \frac{2}{16} + (m-20) \times \frac{1}{16} = \dfrac{4m+4m-20+5m-50+2m-30+m-20}{16} = \dfrac{16m-120}{16}$.

b. Il faut résoudre l'inéquation :

$\dfrac{16m-120}{16} \geqslant 5$ soit $16m - 120 \geqslant 80$ ou encore $16m \geqslant 200$ et enfin $m \geqslant 12,50$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. a. La solution générale de l'équation différentielle est $y = C\mathrm{e}^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

b. Il faut que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} = C\mathrm{e}^{-1}$ soit $C = 1$.

La solution est donc $y = \mathrm{e}^{-x}$.

2. Avec $u(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax$, on a $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + a$, donc u est solution de (E) si $-\mathrm{e}^{-x} + a + \mathrm{e}^{-x} + ax = -x - 1$ ou $ax + a = -x - 1$.

Par identification on obtient $a = -1$, d'où $u(x) = \mathrm{e}^{-x} - x$.

Partie B : étude d'une fonction auxiliaire f

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x.$$

1.

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;
- On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et • On a $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = +\infty$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 1$.

Or $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, donc $-\mathrm{e}^{-x} < 0$ et enfin $-\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$; $f'(x) < 0$ quel que soit le réel x : la fonction f est strictemet décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. La fonction f étant strictement décroissante de plus l'infini à moins l'infini, s'annule une seule fois pour $x = \alpha$.

Or $f(0) = 1$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1} - 1 \approx -0,6$; ceci montre que $0 < \alpha < 1$.

b. La calculatrice donne :
$f(0,5) \approx 0,1$ et $f(0,6) \approx -0,05$ donc $0,5 < \alpha < 0,6$;
f(0,56) $\approx 0,011$ et $f(0,57) \approx -0,005$, donc $0,56 < \alpha < 0,57$.

4. La fonction décroit de plus l'infini à zéro sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ \alpha]$, donc est positive sur cet intervalle puis négative sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

Partie C : Calcul de l'aire d'une partie du plan

1. Voir à la fin.

2. Sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$, la fonction f est positive ; on sait qu'alors l'ire de la surface est égale (en unité d'aire) à l'intégrale :

$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\alpha \left(-\mathrm{e}^{-x} - x\right)\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-x} - \frac{x^2}{2}\right]_0^\alpha = \mathrm{e}^{-\alpha} - \frac{\alpha^2}{2} - \left[\mathrm{e}^{-0} - \frac{0^2}{2}\right] = \mathrm{e}^{-\alpha} - \frac{\alpha^2}{2} - 1.$$

Partie D : étude d'une fonction g et représentation graphique

1. a. En multipliant chaque terme du quotient par e^x, on obtient :
$g(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{1 - x\mathrm{e}^x}$.

b. On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.
Géométriquement ce résultat montre que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_g$.

2. On sait que $f(\alpha) =$

Géométriquement ce résultat signifie que la droite d'équation $x = \alpha$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_g$.

3. a. On a $g'(x) = \dfrac{1 \times (1 - x\mathrm{e}^x) - x(}{(1 - x\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{1 - x\mathrm{e}^x}{(1 - x\mathrm{e}^x)^2}$.

b. On sait que quel que soit le réel x, e^{-x} et $(1 - x\mathrm{e}^x)^2$ sont des nombres positifs. Le signe de $g'(x)$ est donc celui de $1 + x$.
- $1 + x > 0$ si $x > -1$. Sur l'intervalle $]-1\ ;\ \alpha]$, la fonction g est croissante ;
- $1 + x < 0$ si $x < -1$. Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$, la fonction g est décroissante.

La fonction g décroit de plus l'infini à $g(-1) = \dfrac{1\mathrm{e}^1}{1 - 1\mathrm{e}^1} = \dfrac{\mathrm{e}}{1 - \mathrm{e}} \approx 0,582$ puis croit jusqu'à plus l'infini.

4. Voir ci-dessous.

Feuille annexe à remettre avec la copie