Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2009
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4 points**

1. $P(1) = 9 - 21 + 17 - 5 = 26 + -26 = 0$.
2. Si $P(z) = 9z^3 - 21z^2 + 17z - 5 = (z-1)\left(az^2 + bz + c\right) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c = az^3 + z^2(b-a) + (c-b)z - c$, alors en identifiant les termes de même degré :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 9 & = & a \\ -21 & = & b-a \\ 17 & = & c-b \\ -5 & = & -c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 9 & = & a \\ -21 & = & b-9 \\ 17 & = & 5-b \\ -5 & = & -c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 9 \\ b & = & -12 \\ c & = & 5 \\ c & = & 5 \end{array}\right.$$
Donc $P(z) = 9z^3 - 21z^2 + 17z - 5 = (z-1)\left(9z^2 - 12z + 5\right)$.
3. $P(z) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} z-1 & = & 0 \\ 9z^2 - 12z + 5 & = & 0 \end{array}\right.$
Résolution de l'équation du second degré :
$9z^2 - 12z + 5 = 0 \iff (3z-2)^2 - 4 + 5 = 0 \iff (3z-2)^2 + 1 = 0 \iff (3z-2)^2 - \mathrm{i}^2 = 0 \iff (3z-2)^2 = \mathrm{i}^2$
Il y a donc trois solutions dans $\mathbb{C}$:
$$z_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i},\ z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\mathrm{i} \text{ et } z_3 = 1.$$
4. **a.** Voir figure.

   b. $|z_B - z_A|^2 = \left|\frac{1}{3}(2+\mathrm{i}) - 1\right| = \left|-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i}\right|^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$.

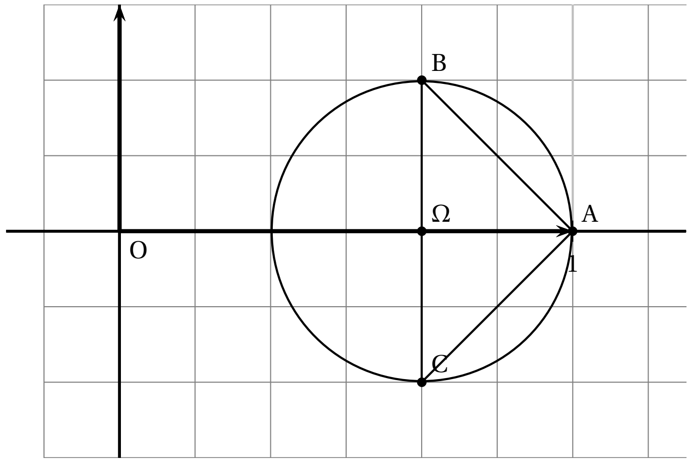
   $|z_A - z_C|^2 = \left|1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i}\right|^2 = \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i}\right|^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$.

   On a donc $AB^2 = CA^2 \iff AB = CA$, donc ABC est isocèle en A.

   Enfin $|z_B - z_C|^2 = \left|\frac{1}{3}(2+\mathrm{i}) - \frac{1}{3}(2-\mathrm{i})\right|^2 = \left|\frac{2}{3}\mathrm{i}\right|\Big|^2 = \frac{4}{9}$.

   On a $\frac{4}{9} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \iff CB^2 = AB^2 + CA^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en A.
5. **a.** ABC étant rectangle en C il est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC] ; donc le centre de $\mathscr{C}$, Ω est le milieu de [BC]. Son affixe est donc $z_\Omega = \frac{2}{3}$.

   b.



EXERCICE 2 **5 points**

Partie A - Effet de réponses au hasard à un exercice de type vrai/faux.

1.

Nombre de bonnes réponses	4	3	2	1	0
Nombre de points	4	2,5	1	0	0

2. Voir l'arbre plus bas.

3. **a.** X peut prendre les quatre valeurs : 4 ; 2,5 ; 1 ; 0.

b.

x_i	4	2,5	1	0
$p(X = x_i)$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{4}{16}$	$\dfrac{7}{16}$	$\dfrac{4}{16}$

c. $\text{E}(X) = 4 \times \dfrac{1}{16} + 2,5 \times \dfrac{4}{16} + 1 \times \dfrac{7}{16} + 0 \times \dfrac{4}{16} = \dfrac{4+10+7}{16} = \dfrac{21}{16} = 2,625$ (points)

Partie B - Un exercice de type vrai-faux.

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Affirmation 1 : Vrai : une seule tangente horizontale dans cet intervalle.

Affirmation 2 : Faux : l'intégrale vaut $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Affirmation 3 : Vrai

Affirmation 4 : Faux : la valeur moyenne est égale à $\dfrac{6}{\pi}$.

PROBLÈME **11 points**

Partie I

1. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

   En écrivant $g(x) = x\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\right)$, la limite de la parenthèse est égale à plus l'infini, celle de x à plus l'infini, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2. **a.** On calcule $d(x) = g(x) - (x-1) = \mathrm{e}^{2x}$.

   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 0$, ce qui montre que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_g$ au voisinage de moins l'infini.

   b. Comme e^{2x} quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $d(x) > 0 \iff g(x) > x - 1$, ce qui signifie que $\mathscr{C}_g$ est au dessus de $\mathscr{D}$ que l que soit $x \in \mathbb{R}$.

3. **a.** Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, g est dérivable et

   $g'(x) = 1 + 2\mathrm{e}^{2x}$. Comme $\mathrm{e}^{2x} > 0$, $g'(x) > 1 > 0$.

   La fonction dérivée est positive sur $\mathbb{R}$; la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

   b. La fonction g est croissante de $-\infty$ à $+\infty$.

4. On a $g(0) = 0 - 1 + \mathrm{e}^{2\times 0} = -1 + 1 = 0$.

   La fonction g étant croissante on en déduit que si $x < 0$, alors $g(x) < 0$ et si $x > 0$, alors $g(x) > 0$

5. Voir la figure

Partie II

1. La fonction f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2(x-1) + 2\mathrm{e}^{2x} = 2\left[x - 1 + \mathrm{e}^{2x}\right] = 2g(x)$.

2. On a vu que si $x < 0$, $g(x) < 0$, donc $2g(x) = f'(x) < 0$.

   Donc pour $x < 0$, f est décroissante et inversement si $x > 0$, f est croissante.

3. La fonction étant décroissante puis croissante elle admet un minimum pour $x = 0$, qui vaut $f(0) = 1 + 1 = 2$.

Partie III - *Application à un problème de distance minimale*

1. **a.** Voir la figure

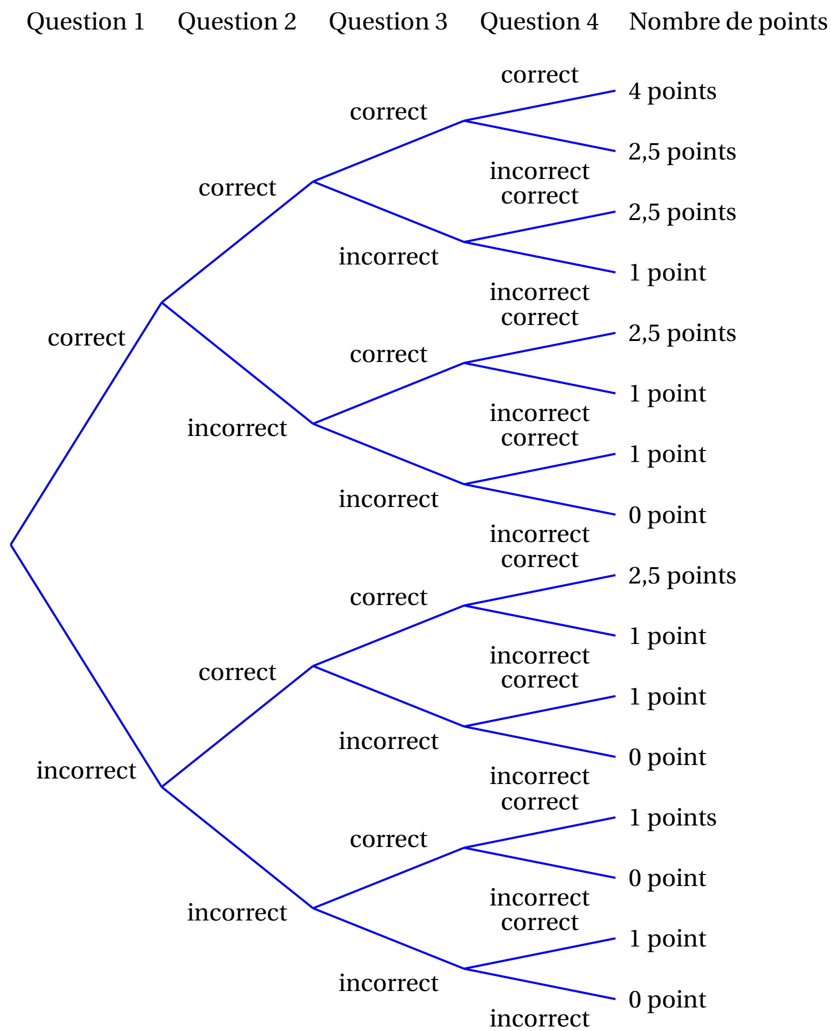
   b. $\mathrm{PA}^2 = (-2)^2 + \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^2 = 4 + \mathrm{e}^{-2}$;

   $\mathrm{PB}^2 = (0)^2 + (\mathrm{e})^2 = \mathrm{e}^2$;

2. **a.** $\mathrm{P}M^2 = (x-1)^2 + (\mathrm{e}^x)^2 = (x-1)^2 + \mathrm{e}^{2x} = f(x)$.

   b. Le carré de la distance minimale est le minimum de la fonction f, qui on l'a vu au dessus est égal à 2 pour $x = 0$; on a $\mathrm{P}M^2_{\text{mini}} = 2$ et le point de $\mathscr{C}_h$ le plus proche de P a pour coordonnées $(0 ; 1)$.

Feuille annexe à rendre agrafée à la copie



Problème : partie II