# Baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2009
# Génie électronique, électrotechnique et optique

**EXERCICE 1** **4 points**

1. On a $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ ; donc $z = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\text{e}^{\frac{2\pi}{3}}$.
2. L'écriture complexe de la rotation est $z' = z\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}$.
   Donc $z_{\text{A}'} = 2\text{e}^{\frac{5\pi}{6}} \times \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \text{i}\sqrt{3}$.
3. $\text{DB} = \left|z_{\overrightarrow{\text{DB}}}\right| = |1+2\text{i} - (-1-3\text{i})| = |2+5\text{i}| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$.
   $\text{DB} = \left|z_{\overrightarrow{\text{DC}}}\right| = |4-\text{i} - (-1-3\text{i})| = |5+2\text{i}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$.
   On a donc DB = DC : le triangle DBC est isocèle en D.
4. $-4+2\text{i}$ vérifie $z^2+8z+c=0 \iff (-4+2\text{i})^2 + 8(-4+2\text{i}) + c = 0 \iff 16-4-16\text{i}-32+16\text{i}+c = 0 \iff c = 20$. L'équation à résoudre est donc $z^2+8z+20=0$ : elle est à coefficients réels, donc ses solutions sont complexes conjuguées : l'une étant $-4+2\text{i}$ l'autre solution est $-4-2\text{i}$.

**EXERCICE 2** **4 points**

1. Les douze codes sont :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1235 | 1245 | 1265 | 3215 |
| 3245 | 3265 | 4215 | 4235 |
| 4265 | 6215 | 6235 | 6245 |

2. **a.** $p_1 = \dfrac{1}{12}$ ;
   **b.** $p_2 = \dfrac{7}{12}$ ;
   **c.** $p_3 = 1 - p_2 = 1 - \dfrac{7}{12} = \dfrac{5}{12}$.
3. **a.** $p(X=3) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.
   **b.** X peut être égale à 2, 3 ou 4.
   **c.**

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $p\,(\text{X} = x_i)$ | $\dfrac{7}{12}$ | $\dfrac{4}{12}$ | $\dfrac{1}{12}$ |

**PROBLÈME** **12 points**

**Partie A : Étude d'une fonction *f***

1. **a.** Comme $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} (2x+1) = 0$ et que $\lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$.
   Géométriquement ceci signifie que la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.
   **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** Avec $u(x) = 2x+1$, la dérivée de $\ln u$ est $\dfrac{u'}{u}$, donc

   $f'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$.

   **b.** On a $x > -\frac{1}{2} \to 2x > -1 \Rightarrow 2x+1 > 0$. Comme $2 > 0$, $\dfrac{2}{2x+1} > 0$.

   Conclusion : sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, $f'(x) > 0$, donc la fonction $f$ est croissante sur son intervalle de définition.

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

   **c.** On a $f(0) = 1 + \ln 1 = 1$.

   On a vu que la fonction est croissante en particulier sur $[0\ ;\ +\infty[$ et comme $f(0) = 1$, on en déduit que sur $[0\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geqslant 1$.

3. **a.** $1 + \ln(2x+1) = 0 \iff \ln(2x+1) = -1 \iff \ln(2x+1) = \ln \mathrm{e}^{-1} \iff 2x+1 = \mathrm{e}^{-1}$ (par croissance de la fonction ln) $\iff x = \frac{\ }{2}\left(\mathrm{e}^{-1} - 1\right)$.

   *Rem. : la fonction étant croissante sur son intervalle de définition on savait qu'il n'y avait qu'une solution à cette équation.*

   **b.** On vient de trouver le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses $\left(\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-1} - 1\right)\ ;\ 0\right)$ et on a vu que $f(0) = 1$ donc le point d'intersection avec l'axe des ordonnées est $(0\ ;\ 1)$.

**Partie B : Étude d'une fonction $g$**

1. **a.** On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, d'où par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

   **b.** $g(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

   Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

   Géométriquement ceci signifie que l'axe des abscisses est asymptote à $\Gamma$ au voisinage de plus l'infini.

2. **a.** Quel soit le réel $x$, $g'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1 - x - 1) = -x\mathrm{e}^{-x}$.

   **b.** On sait que quel soit le réel $x$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ : le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$, donc :

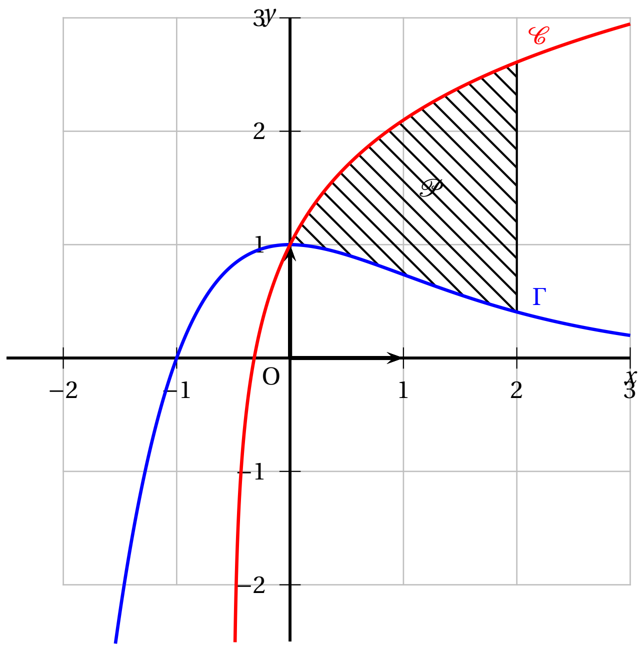
   - pour $x < 0$, $g'(x) > 0$ ;
   - pour $x > 0$, $g'(x) < 0$.

   On en déduit les variations de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $1$ | ↘ $0$ |

**3.** La fonction $g$ a un maximum (extremum avec changement du signe de la dérivée en 0), maximum égal à 1 : on a donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leqslant 1$.

**4.**




**Partie C : Calcul d'aire**

**1. a.** La fonction $F$ produit de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et :
$F'(x) = \ln(2x+1) + 2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{2x+1} = \ln(2x+1) + \dfrac{2x+1}{2x+1} = 1 + \ln(2x+1) = f(x)$.
Conclusion : $F$ est une primitive de $f$ sur $[0~;~+\infty[$.

**b.** On a vu que sur $[0~;~+\infty[$, $f(x) \geqslant 1 > 0$ : l'aire de la surface limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ est égale (en unité d'aire) à :
$I_1 = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = \left(2+\dfrac{1}{2}\right)\ln(2\times 2+1) - \left(\dfrac{1}{2}\right)\ln(2\times 0+1) = \dfrac{5}{2}\ln 5 - 0 = \dfrac{5}{2}\ln 5$.

**2.** $I_2 = \displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_0^2 = G(2) - G(0) = (-2-2)\mathrm{e}^{-2} - (-0-2)\mathrm{e}^{-0} = -4\mathrm{e}^{-2} + 2 = 2 - 4\mathrm{e}^{-2}$.

**3. a.** On a vu que sur $[0~;~+\infty[$, $f(x) \geqslant 1$ et $g(x) \leqslant 1$. Il en résulte donc que sur $[0~;~+\infty[$, $g(x) \leqslant f(x)$, c'est-à-dire géométriquement que $\Gamma$ est au dessous de $\mathscr{C}$.

**b.** Voir la figure plus haut.

**c.** On a vu que sur $[0~;~+\infty[$, $f(x) > 0$ et $0 < g(x) \leqslant 1$. Donc l'aire de la partie $\mathscr{P}$ comprise entre les deux courbes et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ est égale, en unité d'aire à :

$$I_1 - I_2 = \frac{5}{2}\ln 5 - \left(2 - 4\mathrm{e}^{-2}\right) = \frac{5}{2}\ln 5 - 2 + 4\mathrm{e}^{-2}.$$