Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Métropole septembre 2006
Génie électronique, génie électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. $(1-2\mathrm{i})z = (1-\mathrm{i})z - 1 - \mathrm{i} \iff (1-2\mathrm{i}-1+\mathrm{i})z = -1-\mathrm{i} \iff -\mathrm{i}z = -1-\mathrm{i} \iff z = 1-\mathrm{i}$.

2. **a.** Voir plus bas

b. $|z_A|^2 = 1+1 = 2 \Rightarrow |z_A| = \sqrt{2}$.

On peut donc écrire $z_A = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Un argument de z_A est donc $-\dfrac{\pi}{4}$.

c. On a $z_D = -z_A$. Le module de z_D est égal à celui de z_A soit $\sqrt{2}$ et un de ses arguments est : $-\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$.

d. Par la rotation R un point d'affixe z a pour affixe z' telle que : $z' = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Donc $z_B = z_A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\pi}4 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{12}}$.

Le module de z_B est donc égal à $\sqrt{2}$ et un de ses arguments à $\dfrac{\pi}{12}$.

e. B est l'image du point A par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; donc OA = OB et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Le triangle AOB étant isocèle en O, ses trois angles ont pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$: il est donc équilatéral.

En particulier $\mathrm{AB} = \mathrm{OA} = |z_A| = \sqrt{2}$.

3. **a.** On a par définition : $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{w}$.

D'autre part $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\overrightarrow{w}$, puisque D a pour affixe $-1+\mathrm{i}$.

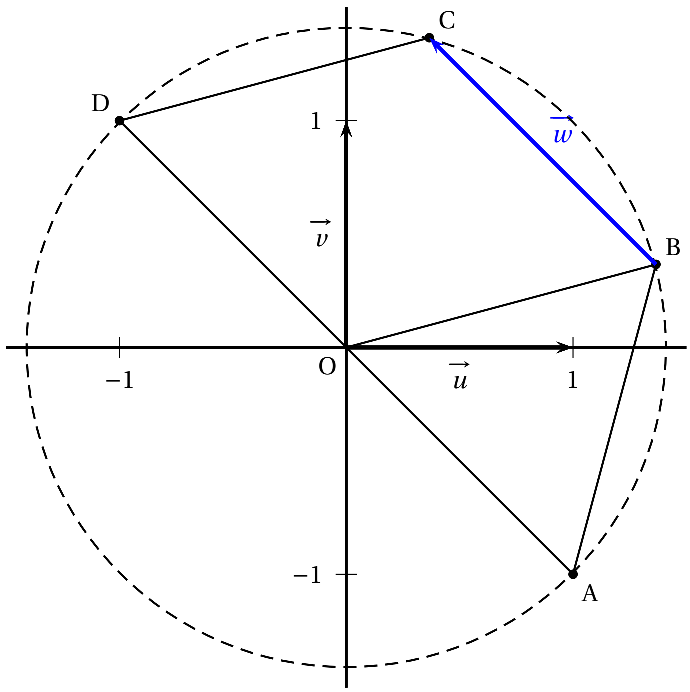
On a donc $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

b. On vient de voir que $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{w}$, donc $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} \iff$ ODCB est un parallélogramme.

c. ODCB est un parallélogramme entraîne que CD = OB ; mais OAB étant équilatéral OB = AB ; donc CD = AB.

d. A, O et D sont alignés ; (OD) est parallèle à (BC) : le quadrilatère ABCD a deux côtés opposés parallèles : c'est un trapèze.

D'autre part on a démontré que CD = AB : ABCD est donc un trapèze isocèle.



EXERCICE 2 **4 points**

1. Les résultats possibles sont :
   (P, P, P) (P, P, F) (P, F, P) (P, F, F) (F, P, P) (F, P, F) (F, F, P) (F, F, F)
2. **a.** Les résultats précédents conduisent respectivement aux valeurs suivantes :
   4 3 3 2 2 1 1 −5

   b.

x_i	4	3	2	1	−5
$p(X = x_i)$	1/8	2/8	2/8	2/8	1/8

   c. $p(X \leqslant 2) = p(X = 2) + p(X = 1) + p(X = -5) = \dfrac{2}{8} + \dfrac{2}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8}$.

3. **a.** On a $\text{E}(X) = 4 \times \dfrac{1}{8} + 3 \times \dfrac{2}{8} + 2 \times \dfrac{2}{8} + 1 \times \dfrac{2}{8} + (-5) \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{11}{8}$.
   L'espérance (de gain) est positive : le jeu n'est pas équitable.

   b. On reprend le calcul de l'espérance avec une perte de x euros si les trois pièces présentent leur côté face :
   $\text{E}(X) = 4 \times \dfrac{1}{8} + 3 \times \dfrac{2}{8} + 2 \times \dfrac{2}{8} + 1 \times \dfrac{2}{8} + x \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{16 + x}{8}$.
   Donc l'espérance est nulle si $x = -16$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Détermination d'une fonction

1. Comme $\text{A}(0\,;\,4) \in \mathscr{C}_f$, on a $f(0) = 4$.

   D'après la dernière information le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$ est nul : $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = 0$.

   D'après la première information on a $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

2. **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x) = b\mathrm{e}^{2x} + 2(bx + c)\mathrm{e}^{2x} = (2bx + b + 2c)\mathrm{e}^{2x}$.

b. $f(x) = a + (bx + c)\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow f(0) = a + c$;

$f'(x) = (2bx + b + 2c)\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \left(2b\frac{1}{4} + b + 2c\right)\mathrm{e}^{2\times\frac{1}{4}} = \left(\dfrac{3b}{2} + 2c\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$;

Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{2x} = 0$ et que $f(x) = a + bx\mathrm{e}^{2x} + c\mathrm{e}^{2x}$, on peut en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$.

3. **a.** En comparant les résultats des questions 1 et 2 on en déduit que a, b et c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a + c & = & 4 \\ \dfrac{3}{2}b + 2c & = & 0 \\ a & = & 1 \end{array}\right.$$

b. Le système précédent est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 + c & = & 4 \\ \dfrac{3}{2}b + 2c & = & 0 \\ a & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} c & = & 3 \\ \dfrac{3}{2}b + 2c & = & 0 \\ a & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} c & = & 3 \\ \dfrac{3}{2}b + 6 & = & 0 \\ a & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} c & = & 3 \\ b & = & -4 \\ a & = & 1 \end{array}\right.$$

On a donc $f(x) = f(x) = 1 + (-4x + 3)\mathrm{e}^{2x}$.

Partie B : étude et représentation d'une fonction

1. **a.** $f(x) = 1 + (-4x + 3)\mathrm{e}^{2x} = 1 - 4x\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{2x}$.
On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{2x} = 0$.
Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

b. Soit la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par :
$d(x) = f(x) - 1 = (-4x + 3)\mathrm{e}^{2x}$.
Comme $\mathrm{e}^{2x} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $d(x)$ est celui de $-4x + 3$.

$-4x + 3 > 0 \iff 3 > 4x \iff \dfrac{3}{4} > x$;

$-4x + 3 < 0 \iff 3 < 4x \iff \dfrac{3}{4} < x$.

Conclusion : sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{3}{4}\right[$, la fonction d est positive ce qui signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de l'asymptote Δ et sur $\left]\dfrac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de l'asymptote Δ.

2. **a.** f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x) = -4\mathrm{e}^{2x} + 2(-4x + 3)\mathrm{e}^{2x} = (-8x + 2)\mathrm{e}^{2x}$.

b. Le signe de $f'(x)$ est celui de $(-8x + 2)$.

Or $-8x + 2 > 0 \iff 2 > 8x \iff \dfrac{1}{4} > x$: donc sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{4}\right[$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante ;

$-8x + 2 < 0 \iff 2 < 8x \iff \dfrac{1}{4} < x$: donc sur $\left]\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$, $f'(x) < 0$, donc f est décroissante.

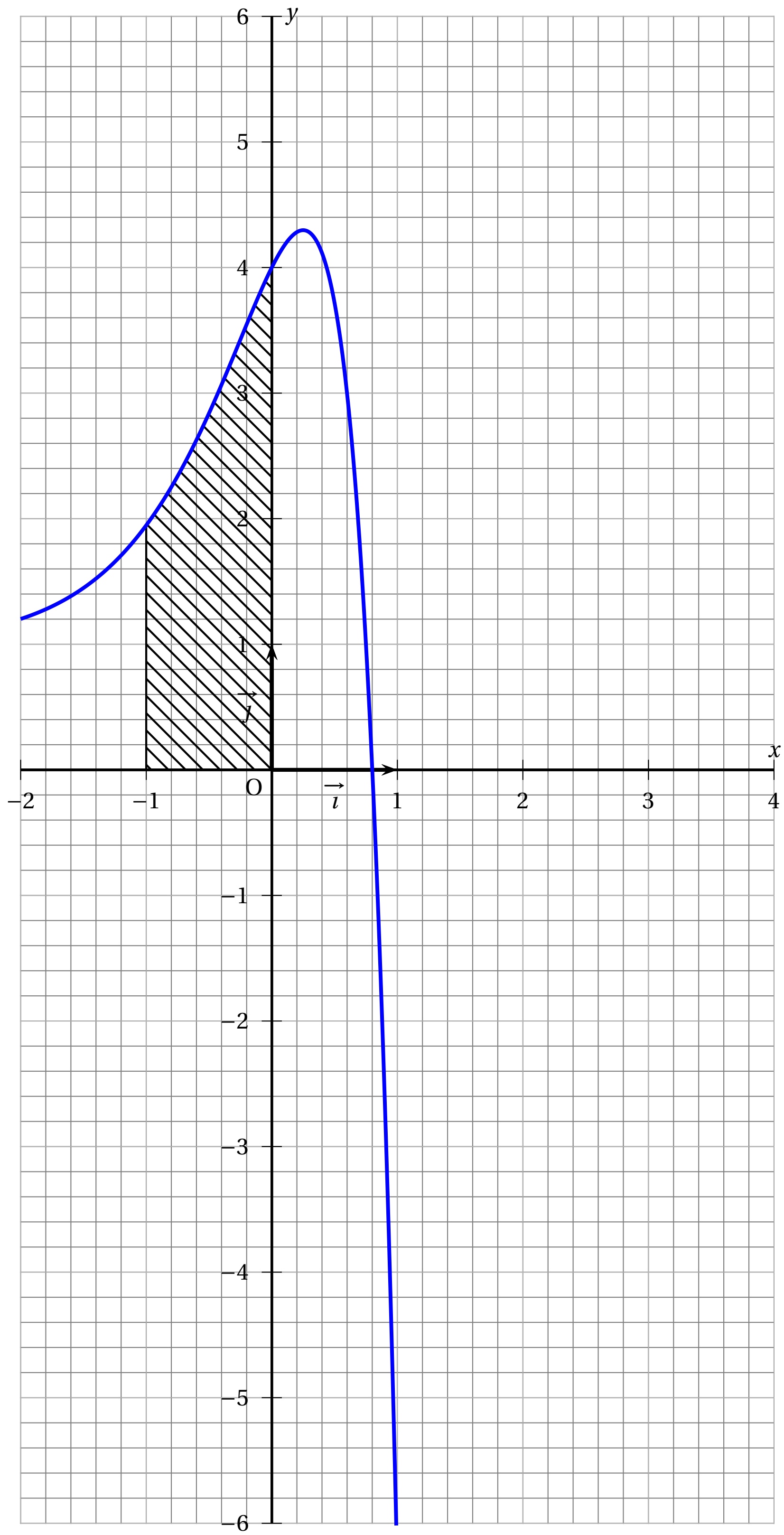
D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$1/4$		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

3. **a.** Le minimum de la fonction est égal à $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \left(-4 \times \frac{1}{4} + 3\right) e^{2 \times \frac{1}{4}} = 1 + 2e^{\frac{1}{2}}$.
Ce minimum est la somme de deux nombres supérieur à zéro : il est supérieur à zéro.
$f(1) = 1 - e^2 \approx -6 < 0$.
Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\ ;\ 1\right]$ la fonction est décroissante : conclusion : il existe un réel unique α de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 0$.
b. La calculatrice donne :
$f(0,8) \approx 0,009$ et $f(0,9) \approx -2,63$, donc $0,8 < \alpha < 0,9$;
$f(0,80) \approx 0,009$ et $f(0,81) \approx -0,21$, donc $0,80 < \alpha < 0,81$
4. Voir plus bas.

Partie C : calcul d'une aire

1. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$H'(x) = -2e^{2x} + 2\left(-2x + \frac{5}{2}\right)e^{2x} = e^{2x}(-4x + 5 - 2) = (-4x + 3)e^{2x} = h(x)$.
Conclusion : H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.
2. **a.** Voir plus bas
b. D'après le tableau de variations, sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$ la fonction f est positive ; donc l'aire en unité d'aire de la surface $\mathcal{D}$ est égale à l'intégrale :
$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 1 + (x)\,dx = \int_{-1}^{0} 1\,dx + \int_{-1}^{0} h(x)\,dx = [x]_{-1}^{0} + [H(x)]_{-1}^{0} = 1 + H(0) - H(-1) = 1 + \left(\frac{5}{2}\right)e^{2\times 0} - \left(\left(-2 \times (-1) + \frac{5}{2}\right)e^{2\times(-1)}\right) = 1 + \frac{5}{2} - \frac{9}{2}e^{-2} = \frac{7}{2} - \frac{9}{2}e^{-2}$ (u. a.).
Or l'unité d'aire est égale à $2 \times 2 = 4$ cm^2.
Donc l'aire de la partie $\mathcal{D}$ est égale à $4\left(\frac{7}{2} - \frac{9}{2}e^{-2}\right) = 14 - 18e^{-2}$ cm^2 soit environ 11,564 ou encore 11,56 cm2 au mm^2 près.



Si vous photocopiez ce corrigé pensez à en créditer l'**A. P. M. E. P.**, merci