Corrigé du baccalauréat STI Métropole & La Réunion septembre 2009 Génie électronique, électrotechnique et optique

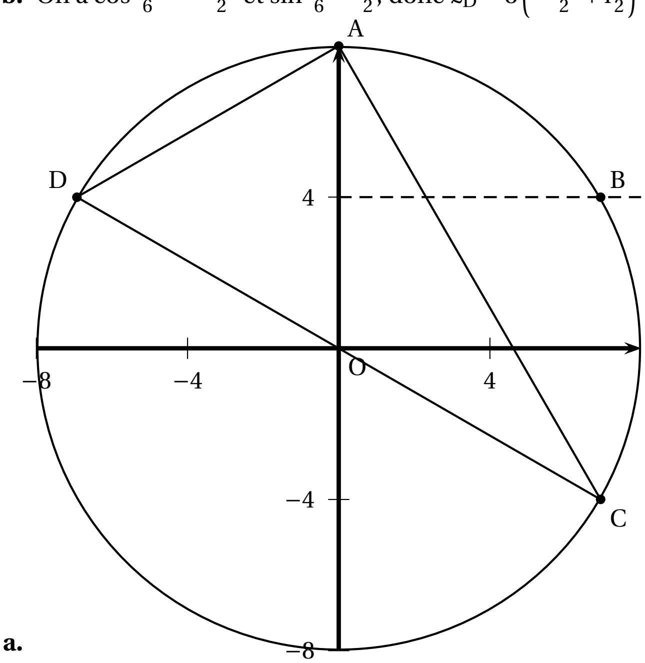
Exercice 1 **6 points**

Partie A

1. $z^2-8z\sqrt{3}+64=0 \iff \left(z-4\sqrt{3}\right)^2-48+64=0 \iff \left(z-4\sqrt{3}\right)^2+16=0 \iff \left(z-4\sqrt{3}\right)^2-(4\text{i})^2=0$.
   Les racines sont donc : $4\sqrt{3}+4\text{i}$ et $4\sqrt{3}-4\text{i}$.
2. Comme $\left|z_0^3\right|=|z_0|^3=2^3=8$.
   De même $\arg\left(z_0^3\right)=3\arg(z_0)=3\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$.
   Finalement $z_0^3=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+\text{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=8(0+\text{i})=8\text{i}$.

Partie B

1. On a $|z_B|^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2+(4)^2=48+16=64=8^2$, donc $|z_B|=8$.
   On peut donc écrire $z_B=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\frac{1}{2}\right)=8\left(\cos\frac{\pi}{6}+\text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=8\text{e}^{\frac{\pi}{6}}$.
   Un des arguments de z_B est $\frac{\pi}{6}$.
   Comme $z_C=\overline{z_B}$, $z_C=8\text{e}^{-\frac{\pi}{6}}$.
   Un des arguments de z_C est $-\frac{\pi}{6}$.
2. On en déduit l'écriture exponentielle : $z_B=8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$.
3. **a.** L'écriture complexe de la rotation est : $z'=z\text{e}^{\frac{\pi}{3}}$, donc $z_D=8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}\times\text{e}^{\frac{\pi}{3}}=8\text{e}^{\frac{5\pi}{6}}$.
   b. On a $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$, donc $z_D=8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\frac{1}{2}\right)=-4\sqrt{3}+4\text{i}$.



4. **a.**
   On place B sur le cercle de centre O et de rayon 8 et la droite d'équation $y=4$.

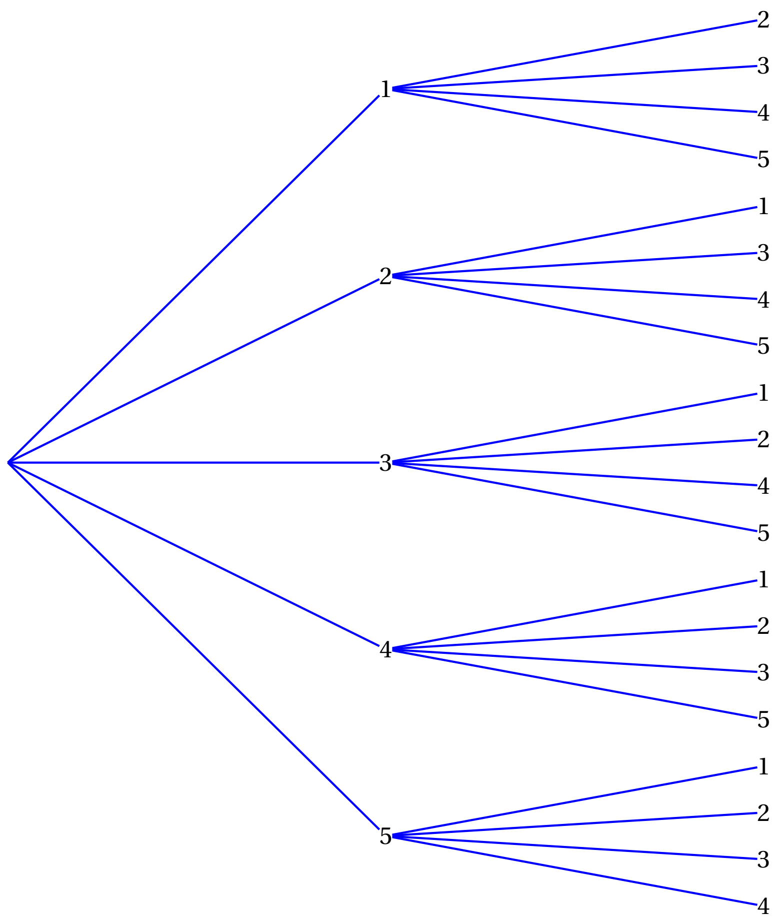
b. Par définition de la rotation OA = OD, donc OAD est isocèle en O.
De plus $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OD}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Il en résulte que les angles à la base ont également une mesure égale à $\dfrac{\pi}{3}$. Il est donc équilatéral.

c. On a $z_{\text{C}} + z_{\text{D}} = 0$. Donc O est le milieu de [CD].

d. D'après la question précédente [CD] est un diamètre du cercle de centre O et de rayon 8 ; A étant un point de cercle le triangle ACD est rectangle en A.

Exercice 2 **4 points**

1. a.



b. Il y a 8 tirages donnant un nombre pair et 8 tirages donnant un multiple de 3, donc $P\left(\text{M}_2\right) = P\left(\text{M}_3\right)$.

c. Les tirages multiples de 3 sont : 12 ; 15 ; 21 ; 24 ; 42 ; 45 ; 51 ; 54. il faut supprimer les pairs : 12 ; 24 ; 42 ; 54 et dans ceux qui restent les multiples de 5, soit 15 et 45. Il reste donc 21 et 51.
On a donc $p(\text{A}) = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

2. a. 13 ; 23 ; 31 ; 41 ; 43 ; 53 qui sont premiers donnant un gain de $0 - 3 = -3$.
14 ; 32 ; 34 ; 52 sont seulement pairs ; ils donnent un gain de $2 - 3 = -1$.
12 ; 24 ; 42 ; 54 sont pairs et multiples de 3 ; ils donnent un gain de $2 + 3 - 3 = 2$.
21 ; 51 sont multiples de 3, mais pas de 2 ni de 5 ; ils donnent un gain de $3 - 3 = 0$.
25 ; 35 sont multiples de 5, mais pas de 2 ni de 3 ; ils donnent un gain de $5 - 3 = 2$.
15 et 45 sont multiples de 3 et de 5 ; ils donnent un gain de $3 + 5 - 3 = 5$.

b. Deux tirages (21 et 51) donnent un gain de 0 € ; la probabilité $P(X=0)=\dfrac{2}{20}=\dfrac{1}{10}$.

c. On a le tableau suivant :

x_i	-3	-1	0	2	5
$p(X=x_i)$	$\dfrac{6}{20}$	$\dfrac{4}{20}$	$\dfrac{2}{20}$	$\dfrac{6}{20}$	$\dfrac{2}{20}$

3. a. $\text{E}(X)=-3\times\dfrac{6}{20}-1\times\dfrac{4}{20}+0\times\dfrac{2}{20}+2\times\dfrac{6}{20}+5\times\dfrac{2}{20}=\dfrac{-18-4+12+10}{20}=-\dfrac{0}{20}=0$ €.

b. L'espérance de gain étant nulle, le jeu est pas équitable.

Problème **10 points**

Partie A : Détermination d'une fonction g

1. $2y'+y=0\iff y'=-\dfrac{1}{2}y$.
On sait que les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme
$f(x)=K\text{e}^{-\frac{x}{2}}$.

2. La solution vérifiant $f(2)=\text{e}=K\text{e}^{-\frac{2}{2}}\iff \text{e}=K\text{e}^{-1}\iff K=\text{e}^2$.
La fonction s'écrit donc $f(x)=\text{e}^2\text{e}^{-\frac{x}{2}}=\text{e}^{2-\frac{x}{2}}$.

3. $g(x)=(2x+1)[f(x)]^2-9=(2x+1)\left[\text{e}^{\left(2-\frac{1}{2}x\right)}\right]^2-9=(2x+1)\left[\text{e}^{2\left(2-\frac{1}{2}x\right)}\right]-9=$
$(2x+1)\text{e}^{4-x}-9$.

Partie B : Étude de la fonction g

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{e}^{4-x}=+\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)=-\infty$ donc par produit
$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

2. a. On a $g(x)=(2x+1)\text{e}^{4-x}-9=2x\text{e}^{4-x}+\text{e}^{4-x}-9=2x\text{e}^{-x}\times\text{e}^4+\text{e}^4\times\text{e}^{-x}-9=2\text{e}^4x\text{e}^{-x}+\text{e}^4\text{e}^{-x}-9$.

b. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{e}^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x\text{e}^{-x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-9$

c. La question précédente montre que la droite Δ d'équation $y=-9$ est asymptote $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.

3. a. g est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$g'(x)=2\text{e}^{4-x}-(2x+1)\text{e}^{4-x}=(1-2x)\text{e}^{4-x}$.

b. Comme $\text{e}^{4-x}>0$ quel que soit le réel x, le signe de $g'(x)$ est celui de $1-2x$ qui s'annule pour $x=\dfrac{1}{2}$.

Donc $g'(x)>0\iff x<\dfrac{1}{2}$, donc g est croissante sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$.

$g'(x)<0\iff x>\dfrac{1}{2}$, donc g est décroissante sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

On calcule $g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2\times\dfrac{1}{2}+1\right)\text{e}^{4-\frac{1}{2}}-9=2\text{e}^{\frac{7}{2}}-9$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{\frac{7}{2}}-9$	$\searrow$	-9

4. **a.** $g(-1) = (2\times(-1)+1)\mathrm{e}^{4+1}-9 = -\mathrm{e}^5-9$.
   $g(0) = \mathrm{e}^{4-0}-9 = \mathrm{e}^4-9$.

   b. La fonction g est dérivable et croissante sur l'intervalle $]-1~;~0[$; de plus $g(-1)\approx -157<0$ et $g(0)\approx 46>0$.
   L'équation $g(x)=0$ admet donc une solution unique α dans l'intervalle $[-1~;~0]$.

   c. La calculatrice donne $g(-0,45)\approx -0,437$ et $g(-0,44)\approx 1,173$, donc
   $\alpha\approx -0,45$ au centième près.

5. On a $g(4)=0$ et $g'(4)=-7$.
   Une équation de la droite $\mathscr{D}$ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4 est donc :

$$M(x~;~y)\in\mathscr{D} \iff y=-7x+28.$$

6. **a.** Cf. plus bas

   b. Voir plus bas

Partie C : Calcul d'aire

1. La fonction G est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; elle est dérivable et
   $G'(x) = -2\mathrm{e}^{4-x}-(-2x-3)\mathrm{e}^{4-x}-9 = (2x+1)\mathrm{e}^{4-x}-9 = g(x)$.
   Donc G est une primitive de g.

2. **a.** Voir figure

   b. Sur l'intervalle $[0;4]$ la fonction g est positive; l'aire (en unités d'aire de la surface $\mathscr{H}$ est donc égale à l'intégrale

$$\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_0^4 = G(4)-G(0)$$

   Or $G(4)-G(0) = (-2\times4-3)\mathrm{e}^{4-4}-9\times4-(-2\times0-3)\mathrm{e}^{4-0}-9\times0 = -11-36+3\mathrm{e}^4 = 3\mathrm{e}^4-47$.

   c. L'unité d'aire est égale à $2\times0,1=0,2$ cm^2.
   L'aire est donc égale $0,2\times\left(3\mathrm{e}^4-47\right)\approx 25,36$ cm^2 (au centième près).

Annexe du problème à rendre avec la copie

Tableau des valeurs de la fonction g (valeurs arrondies à l'unité)

x	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$	0	0,5	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	-67	-9	26	46	51	28	10	8	0	-5	-7

Repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour 1 unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée