Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Métropole 23 juin 2008 Génie électronique, Génie électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. $\Delta = \left(6\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 36 = -1\times 36 = (6\text{i})^2$. L'équation a donc deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{-6\sqrt{3}+6\text{i}}{2} = -3\sqrt{3}+3\text{i} \quad \text{et} \quad z_2 = -3\sqrt{3}-3\text{i}.$$

2. a. $|z_A|^2 = 27+9 = 36 = 6^2 \Rightarrow |z_A| = 6$.

On peut donc écrire $z_A = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\text{i}\right) = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Un argument de z_A est donc $\frac{2\pi}{3}$

$|z_B|^2 = 27+9 = 36 = 6^2 \Rightarrow |z_B| = 6$.

Alors $z_B = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\text{i}\right) = 6\left(\cos\frac{-2\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{-2\pi}{3}\right)$. Un argument de z_B est donc $-\frac{2\pi}{3}$

b. D'après la question précédente $z_A = 6\text{e}^{-\frac{\pi}{3}}$.

c. Voir la figure plus bas.

3. a. $AB = |z_B - z_A| = 6$.

$AC = |z_C - z_A| = \left|-3\sqrt{3}-3\text{i}\right| = \sqrt{27+9} = 6$.

Comme A et B sont symétriques autour de $(\text{O}u)$, CA = CB et finalement CA = CB = BA = 6 : le triangle ABC est équilatéral.

b. On a vu que OA = OB = 6, donc OA = AC = CB = BO = 6 : le quadrilatère OACB ayant ses quatre côtés de même longueur, c'est un losange.

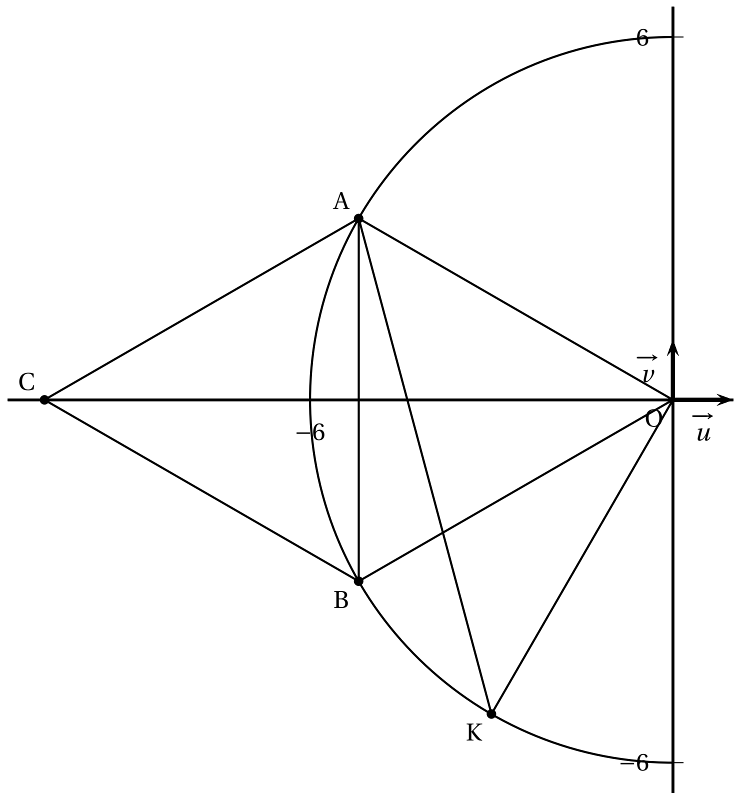
4. a. Voir la figure

b. K est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c. L'image de M d'affixe z par la rotation précédente est M' d'affixe z' telle que $z' = z\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$.

Donc $z_K = z_A\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = 6\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}\times\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = 6\text{e}^{\text{i}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = 6\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$.

Écriture algébrique : $z_K = 6\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\text{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 6\left(\frac{-1}{2}+\text{i}\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -3-3\sqrt{3}\text{i}$.



EXERCICE 2 **4 points**

1. On sait que les solutions sont de la forme :
   $y = A\cos 5x + B\sin 5x$.
2. On a donc
   - $f(x) = A\cos 5x + B\sin 5x$;
   - $-2 = A\cos\frac{5\pi}{6} + B\sin\frac{5\pi}{6}$;
   - $-5 = 5B\cos 5\times 0$.

   La troisième équation donne $B = -1$ et en remplaçant dans la deuxième :
   $-2 = A\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} \iff -\frac{3}{2} = A\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \iff \sqrt{3} = A.$

   Donc $f(x) = \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x. = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\sin 5x\right) =$

   $2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 5x - \sin\frac{\pi}{6}\sin 5x\right) = 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$
3. $f(x) = \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\sin 5x\right) =$

   $2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 5x - \sin\frac{\pi}{6}\sin 5x\right) = 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$
4. $V_m = \frac{1}{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{6}{\pi}\left[\frac{1}{5}\times 2\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{12}{5\pi}\left(\sin(-\pi) - \sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{12}{5\pi}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{6}{5\pi}.$

PROBLÈME **11 points**

Partie A : étude de la fonction f

1. **a.** Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x} = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\mathrm{e}^{3x}+1} = 0$

   b. Ceci montre que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

   c. Quel que soit $x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{x} > 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{3x} > 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{3x}+1 > 0 \Rightarrow \dfrac{3}{\mathrm{e}^{3x}+1} > 0$.

   On peut donc dire que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de son asymptote quel que soit le réel x.

2. **a.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{x}\right)^3 = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

   b. La question précédente montre que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.

   c. $3 - \dfrac{3\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+1} = \dfrac{3\mathrm{e}^{3x}+3-3\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+1} = \dfrac{3}{\mathrm{e}^{3x}+1} = f(x)$.

   d. Comme $\dfrac{3\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+1} > 0$, il en résulte que $f(x) < 3$, c'est-à-dire que $\mathscr{C}$ est au dessous de $\mathscr{D}$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

3. **a.** f quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

   $f'(x) = -\dfrac{3 \times 3\mathrm{e}^{3x}}{\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)^2} = \dfrac{-9\mathrm{e}^{3x}}{\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)^2}$.

   b. Tous les termes sont positifs excepté -9, la dérivée est donc négative et la fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	3 ↘	0

4. Le point d'abscisse 0 a pour ordonnée $f(0) = \dfrac{3}{1+1} = \dfrac{3}{2}$. En ce point le nombre dérivé $f'(0)$ est égal à $-\dfrac{9}{4}$.

   L'équation de la tangente est donc :

   $M(x\,;\,y) \in \Delta \iff y - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{9}{4}(x-0) \iff y = -\dfrac{9}{4}x + \dfrac{3}{2}$.

5. Voir la figure.

Partie B : Calcul de l'aire d'une partie du plan

1. **a.** En posant $u(x) = \mathrm{e}^{3x}+1$, $u'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$, donc $g(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et une primitive de g est donc G telle que $G(x) = \ln|u(x)| = \ln\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)$, car $\mathrm{e}^{3x}+1 \geqslant 1 > 0$.

   $G(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)$

   b. Avec la même notation, le résultat de la question 2. c. s'écrit

   $f(x) = 3 - \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et par conséquent une primitive de f est la fonction F telle que :

   $F(x) = 3x - \ln\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)$

2. **a.** On sait qu'en unités d'aire l'aire de la surface est égale à :
$\mathcal{A}(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. $\mathcal{A}(a) = [F(x)]_0^a = \left[3x - \ln\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)\right]_0^a = 3a - \ln\left(\mathrm{e}^{3a}+1\right) - \left[3\times 0 - \ln\left(\mathrm{e}^{3\times 0}+1\right)\right]$ = 3a - $\ln\left(\mathrm{e}^{3a}+1\right) + \ln 2$.

3. Comme $3a = \ln\left(\mathrm{e}^{3a}\right)$, on a $\mathcal{A}(a) = \ln\left(\mathrm{e}^{3a}\right) - \ln\left(\mathrm{e}^{3a}+1\right) + \ln 2 = \ln \dfrac{2\mathrm{e}^{3a}}{\mathrm{e}^{3a}+1}$.

On peut écrire en multipliant chaque terme par e^{-3a}, $\mathcal{A}(a) = \ln \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-3a}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-3a} = 0$, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \mathcal{A}(a) = \ln 2$.