Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Antilles-Guyane Génie mécanique, énergétique, civil juin 2009

EXERCICE 1 **5 points**

1.

	France	Étranger	Total
Le week-end	80	25	105
La semaine	40	0	40
Deux semaines	30	75	105
Total	150	100	250 / 250

2. **a.** $p(F) = \dfrac{150}{250} = \dfrac{3}{5} = 0,6$.

   b. $p(S) = \dfrac{105}{250} = \dfrac{21}{50} = 0,42$.

   c. Il faut trouver $p_S(F) = \dfrac{p(S\cap F)}{p(S)} = \dfrac{\frac{30}{250}}{\frac{105}{250}} = \dfrac{30}{105} = \dfrac{2}{7}$.

3. Les frais de dossier s'élèvent pour l'agence à :

   a.

X	2	5	15
$p(X = x_i)$	0,42	0,16	0,42

   b. $\text{E}(X) = 2\times 0,42 + 5\times 0,16 + 15\times 0,42 = 0,84 + 0,80 + 6,30 = 7,94$ €.

   c. Le coût moyen d'un dossier est égal à $7,94$ € ; pour rentrer dans ses frais l'agence doit au moins demander cette somme à chaque client, soit 8 € à 10 centimes près.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Le nombre complexe $z = 1 + \text{i}\sqrt{3}$ a pour module et argument respectivement :
   On a $|z|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z| = 2$.
   D'où $z = 2\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Donc réponse B.
2. Si A$(1+\text{i})$, on a $\text{OA}^2 = 1 + 1 = 2$, donc $\text{OA} = \sqrt{2}$, donc réponse C
3. $\dfrac{z-\text{i}}{z+\text{i}} = -\text{i} \iff z - \text{i} = -\text{i}z + 1 \iff z(1+\text{i}) = 1 + \text{i} \iff z = 1$ (car $1+\text{i} \neq 0$. Donc réponse A.
4. Si A$(0\ ;\ -\text{i})$ et B$(1\ ;\ 0)$, alors $|z+\text{i}| = |z-1|$ signifie que $M\text{A} = M\text{B}$, donc que M appartient à la médiatrice de [AB] qui a pour équation $y = -x$. Donc réponse B.
   Remarque : on peut aussi noter $z = x + \text{i}y$ et arriver à $y = -x$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : recherche de l'expression de $f(x)$

En utilisant le graphique de la feuille annexe,

1. On lit $f(1) = 2$.
   La droite T est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1. Le nombre dérivé $f'(1)$ est donc le coefficient directeur de T qui contient les points $(0\,;\,1)$ et $(1\,;\,2)$, donc $f'(1) = \dfrac{2-1}{1-0} = 1$.
2. $x \neq 0$, donc f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $f'(x) = a\dfrac{\frac{1}{x}\times x - \ln x \times 1}{x^2} = a\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.
3.
$$\left\{\begin{array}{lcl} f(1) & = & 2\\ f'(1) & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a\dfrac{\ln 1}{1}+b & = & 2\\ a\dfrac{1-\ln 1}{1^2} & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b & = & 2\\ a & = & 1\end{array}\right.$$

Conclusion : sur $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + 2$.

Partie B : étude de la fonction f

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$, d'où par produit des limites $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.
   On en déduit que l'axe des ordonnées d'équation $y = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ au voisinage de 0.
2. **a.** On sait (puissances comparées) que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
   Donc la droite D d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

   b. Soit d la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $d(x) = f(x) - 2 = \dfrac{\ln x}{x}$.
   Comme $x > 0$, le signe de ce quotient est le signe du numérateur $\ln x$, soit :
   - $\ln x > 0 \iff x > 1$, donc sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ $\mathscr{C}$ est au dessus de D ;
   - $\ln x = 0 \iff x = 1$; le point $(1\,;\,2)$ est commun à $\mathscr{C}$ et à D ;
   - $\ln x < 0 \iff x < 1$, donc sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de D.

   c. Voir plus bas.
3. Sur $]0\,;\,+\infty]$, la fonction f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - \ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.
4. Comme $x^2 > 0$ sur $]0\,;\,+\infty]$ la dérivée est du signe du numérateur $1 - \ln x$.
   Or $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \mathrm{e} > x$. La dérivée est positive non nulle sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$.
   De même $1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff \mathrm{e} < x$. La dérivée est négative non nulle sur $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
   D'où le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2+\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	2

Partie C : Calcul d'une aire

$$g(x) = (\ln x)^2$$

1. g est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et $g'(x) = 2\ln x \times (\ln x)' = 2\ln x \times \dfrac{1}{x} = 2\dfrac{\ln x}{x}$.

   Conclusion sur $]0~;~+\infty[$ une primitive de $\dfrac{\ln x}{x}$ est $\dfrac{1}{2}g(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

   Finalement une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$ est la fonction F définie sur cet intervalle est $F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + 2x$.

2. On a vu que sur $[1~;~\text{e}]$, $\mathscr{C}$ est au dessus de D, donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine S est en unité d'aire l'intégrale :

   $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^{\text{e}} [f(x) - 2]\,\text{d}x = [F(x) - 2x]_1^{\text{e}} = \left[\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\text{e}} = \dfrac{1}{2}\left[(\ln \text{e})^2 - (\ln 1)^2\right] = \dfrac{1}{2}$ (u. a.).

   L'unité de longueur étant sur les deux axes de 2 cm, une unité d'aire est égale à $2 \times 2 = 4$ cm^2.

   D'où $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} \times 4 = 2$ cm^2.

Feuille annexe

(à rendre avec la copie)