Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat Métropole 23 juin 2009 ∾ STI Génie mécanique, civil

EXERCICE 1 **6 points**

1. **a.** On lit sur le graphique :

$f(0)=3,\ f(8)=4,\ f'(0)=0,\ f'(8)=0$

b. Sur $[0\ ;\ 8]$, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

c. On a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 3\\ f(8) & = & 4\\ f'(0) & = & 0\\ f'(8) & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} d & = & 3\\ 512a+64b+8c+d & = & 4\\ c & = & 0\\ 192a+16b & = & 0\end{array}\right.$$

d. Il reste à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 512a+64b & = & 1\\ 12a+b & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 512a+64b & = & 1\\ b & = & -12a\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -\dfrac{1}{256}\\ b & = & \dfrac{3}{64}\end{array}\right.$$

On a donc $f(x)=-\dfrac{1}{256}x^3+\dfrac{3}{64}x^2+3$.

2. **a.** La surface dont on cherche l'aire se décompose en :

- un demi-disque de rayon 3 ;
- un demi-disque de rayon 4 ;
- la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses, la droite d'équation $x=0$ et la droite d'équation $x=8$;
- la surface symétrique de de la précédente autour de l'axe des abscisses.

b. L'aire $\mathscr{A}$ demandée est égale à :

$\mathscr{A}=\dfrac{\pi\times 9}{2}+\dfrac{\pi\times 16}{2}+2\displaystyle\int_0^8\left(-\dfrac{1}{256}x^3+\dfrac{1}{64}x^3+3x\right)=12,5\pi+2\left[-\dfrac{1}{256\times 4}x^4+\dfrac{1}{64}x^3+3x\right]_0^8=$

$12,5\pi-2\times\dfrac{1}{256\times 4}\times 8^4+2\times\dfrac{8^3}{64}+2\times 3\times 8=12,5\pi+56\ \left(\text{m}^2\right)$.

La calculatrice donne $\mathscr{A}\approx 95,269\approx 95,3\ \left(\text{m}^2\right)$.

3. Le volume V est égal à :

$V=1,6(12,5\pi+56)=20\pi+89,6$ soit $V\approx 152,4\approx 152\ \left(\text{m}^3\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** On a de façon évidente $|z_{\text{A}}|=1$; $|z_{\text{B}}|^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$.

Donc $|z_{\text{B}}|=1$.

Conclusion : les points A et B appartiennent au cercle centré en O de rayon 1.

b. $z_B = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\text{i}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \text{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4}$.

Un argument de z_B est donc $\dfrac{\pi}{4}$.

c. Voir la figure

d. Le point I se place en construisant la médiatrice de [AB].

L'affixe de I est égale à la demi-somme des affixes de A et de B, soit $z_I = \dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

2. a. On a $|z_I|^2 = \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{(2+\sqrt{2})^2+2}{16} = \dfrac{4+2+4\sqrt{2}+2}{16} = \dfrac{8+4\sqrt{2}}{16} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Finalement $\text{OI} = |z_I| = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

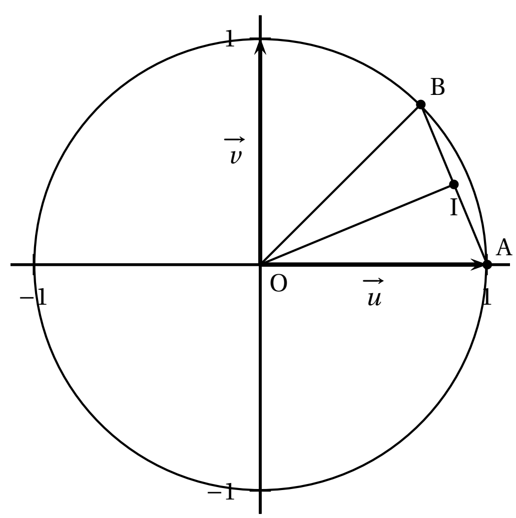
b. Dans le triangle isocèle OAB (puisque OA = OB = 1), la droite (OI) médiane est aussi bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$, donc $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OI}}\right) = \frac{\pi}{8}$

c. z_I a donc pour écriture trigonométrique :

$z_I = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + \text{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)$

3. En identifiant les parties réelles de z_I obtenues aux questions 1. d. et 2. c., on obtient :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$



PROBLÈME **9 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

1. $g'(x) = -\dfrac{1}{x} - 2x = -\dfrac{1+2x^2}{x}$.
   Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $x > 0$ et $1 + 2x^2 \geqslant 1 > 0$, donc $g'(x) < 0$.
   La fonction g est donc décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. On a $g(1) = 1 - 0 - 1 = 0$. La fonction étant décroissante :
   - $g(x) > 0$ si $0 < x < 1$;
   - $g(1) = 0$;
   - $g(x) < 0$ si $x > 1$.

Partie B : étude de la fonction f

1. **a.** Comme $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$.

   b. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

   c. Soit d la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $d(x) = g(x) - (-x+2) = \dfrac{\ln x}{x}$. On a vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} = 0$.
   Ceci montre que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

   d. Il faut étudier le signe de $d(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ qui est celui de $\ln x$. Donc :
   - Si $0 < x < 1$, $\mathcal{C}$ est au dessous de $\mathcal{D}$.
   - Si $x = 1$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont un point commun de coordonnées $(1\ ;\ 1)$;
   - Si $x > 1$, $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}$.

2. **a.** f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et
   $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} - 1 = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} - 1 = \dfrac{1 - \ln x - x^2}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b. Comme $x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ vu en A. 2. D'où le tableau de variations de f : (avec $f(1) = -1 + 2 = 1$.)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

3. **a.** Le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ est égal à -1. Il faut donc chercher pour quelle valeur de x le nombre dérivé $f'(x)$ est égal à -1, soit :
   $\dfrac{1 - \ln x - x^2}{x^2} = -1 \iff 1 - \ln x - x^2 = -x^2 \iff 1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff \mathrm{e} = x$. Et
   $f(\mathrm{e} = \dfrac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} - \mathrm{e} + 2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}} + 2 - \mathrm{e}$.
   On a donc $\mathrm{A}\left(\mathrm{e}\ ;\ \dfrac{1}{\mathrm{e}} + 2 - \mathrm{e}\right)$.

b. La tangente cherchée est la tangente en A. Une de ses équations est donc

$$y - f(\mathrm{e}) = -1(x - \mathrm{e}) \iff y = -x + \mathrm{e} + f(\mathrm{e}) \iff y = -x + \mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} + 2 - \mathrm{e} \iff y = -x + \frac{1}{\mathrm{e}} + 2.$$

4. **a.** Sur $[0\ ;\ 1]$, f est croissante de moins l'infini à $+1$; comme elle est dérivable, il existe un nombre unique $\alpha \in]0\ ;\ 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b. La calculatrice donne $f(0,48) \approx -0,091$ et $f(0,49) \approx 0,054$, donc $0,48 < \alpha < 0,49$.

5.